

Planung Unterrichtsstunde

Fach

Mathematik

Schülername

Sandra

Unterrichtsthema

Grafische Vektoraddition

Unterthemen

Stelle der Schülerin auf ihrem Übungsblatt eine Vorlage eines Koordinatensystems im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ zur grafischen Addition zur Verfügung.

Beachte

- Bei den Lehrerlösungen auch die grafische Lösung angeben.
- Wähle die Zahlen derart, dass die Vektoren nicht optisch übereinander liegen.

Grafiken

- Bitte in ALLE Koordinatensysteme immer ein Hilfsgitter einzeichnen.
- Beim $\mathbb{R}^3$ -Koordinatensystem zeigt die z-Achse nach oben.

Schüler-Interessen

Künstliche Intelligenz

Mathematik-Unterricht für Sandra

Thema: Grafische Vektoraddition

Ziel der Stunde (für Dich formuliert)

Du kannst zwei Vektoren im Koordinatensystem grafisch addieren (Pfeil-an-Pfeil oder Parallelogrammregel) und die Ergebnis-Komponenten sauber ablesen. Du erkennst außerdem, warum das in KI-Anwendungen (z. B. Bewegungsplanung eines Roboters oder Optimierung in einem Vektorraum) eine Rolle spielt.

Stundenaufbau (45 Minuten, 6 Phasen)

1) Begrüßung (3 Min.)

Kurz ankommen, Heft auf, Stifte bereit. Mini-Impulsfrage: „Wenn eine KI zwei Einflüsse gleichzeitig berücksichtigt (z. B. *Wunschrichtung* und *Hindernis-Ausweichen*), wie könnte man beides zusammenfassen?“ → Überleitung: „Addieren von Vektoren“.

2) Lernzielvereinbarung (4 Min.)

Du notierst: „Ich kann Vektoren grafisch addieren und den Summenvektor zeichnen und angeben.“

Kriterium: Pfeile korrekt verschoben (parallel), Start-/Endpunkt stimmt, Ergebnisvektor vom Ursprung bzw. vom Startpunkt des ersten Pfeils.

3) Erarbeitung (18 Min.)

Einführungsbeispiel gemeinsam (siehe unten): erst rechnerisch (Komponenten addieren), dann grafisch (Pfeil-an-Pfeil).

Didaktik: Ich zeige zuerst die *Verschieberegeln* (Vektoren darfst Du parallel verschieben), dann die *Pfeil-an-Pfeil-Regel*. Du zeichnest mit Hilfsgitter und kontrollierst durch Ablesen.

4) Sicherung (10 Min.)

Merksatz wird gemeinsam formuliert und an einem zweiten Beispiel überprüft:

- Grafisch: Spitze an Fuß, dann Pfeil vom Start des ersten zum Ende des zweiten.
- Rechnerisch: Komponentenweise addieren.

Kurzer Transfer in KI-Kontext: „Zwei *Feature-Richtungen* (Vektoren) werden zu einer *Gesamtrichtung* kombiniert.“

5) Reflexion (6 Min.)

Du beantwortest mündlich oder schriftlich:

- Was war beim Zeichnen am fehleranfälligsten?
- Woran erkennst Du, dass Du korrekt parallel verschoben hast?

Mini-Selbstcheck: „Kann ich das Ergebnis grob schätzen, bevor ich zeichne?“

6) Verabschiedung (4 Min.)

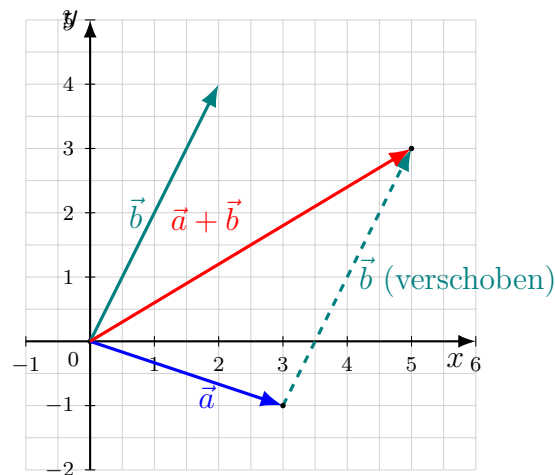
Hausaufgaben werden erklärt (Übungszettel). Abschlussfrage: „Wo tauchen Vektorsummen in KI/Robotik/Computergraphik auf?“

Einführungsbeispiel (wird in der Stunde gemeinsam besprochen)

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Rechnerisch: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Grafisch: $\vec{b}$ wird so verschoben, dass sein Fuß an der Spitze von $\vec{a}$ sitzt. Der Summenvektor geht vom Ursprung zur neuen Spitze.



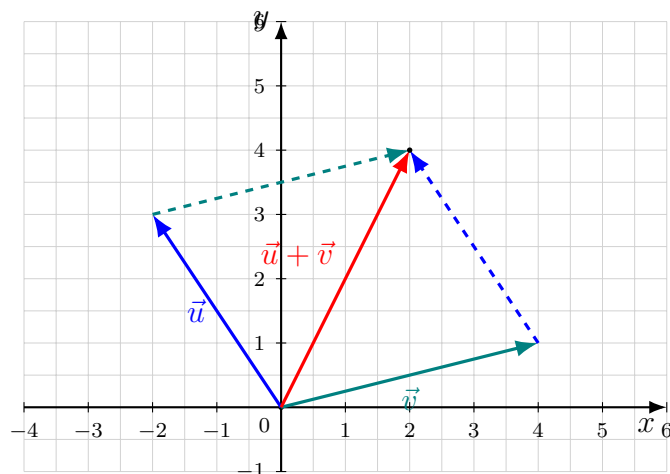
Drei optionale weitere Beispiele (mit Lösungsweg)

Beispiel 1 ($\mathbb{R}^2$, Parallelogrammregel):

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Grafisch: Beide ab Ursprung zeichnen, Parallelogramm schließen, Diagonale ist $\vec{u} + \vec{v}$.



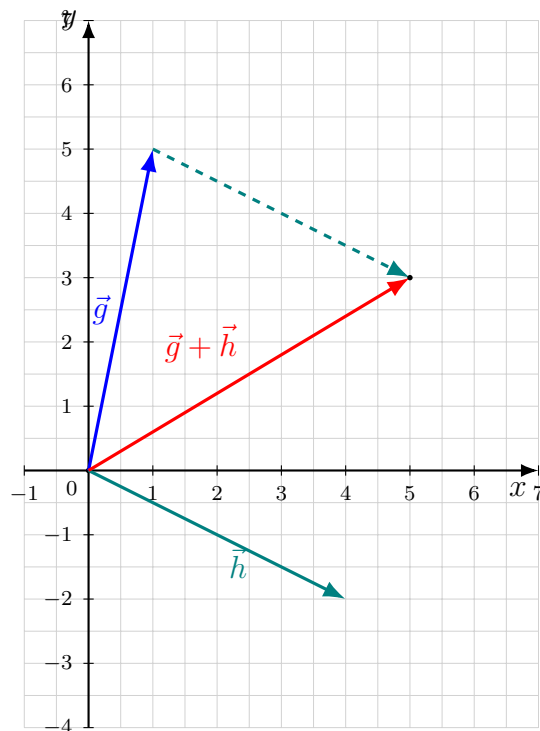
Beispiel 2 ($\mathbb{R}^2$, KI-Story „Zwei Einflüsse“):

Eine einfache „KI-Steuerung“ mischt zwei Richtungen:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ (Zielrichtung)}, \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ (Hindernis-Ausweichen)}$$

$$\vec{g} + \vec{h} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Grafisch: Spitze-an-Fuß oder Parallelogramm, Ergebnis zeigt die Gesamtrichtung.

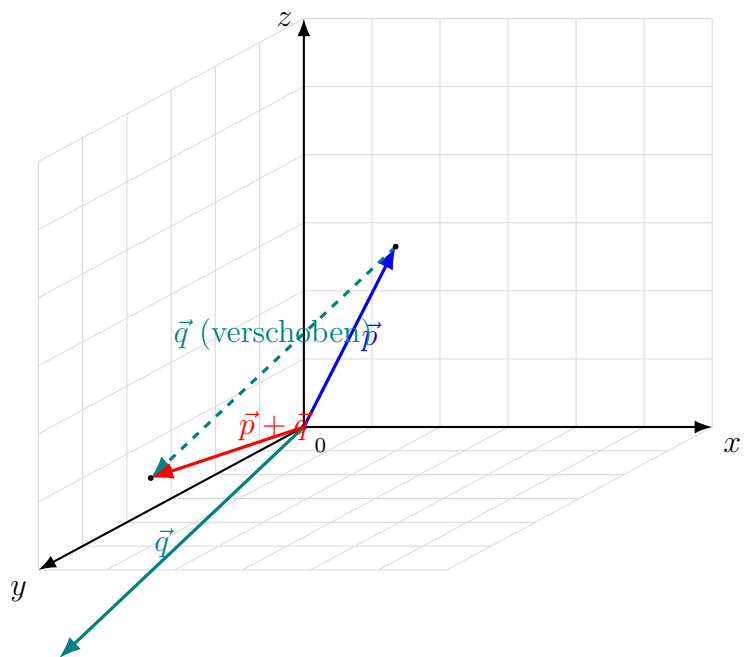


Beispiel 3 ($\mathbb{R}^3$, grafisch in 3D-Koordinatensystem):

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1+4 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Grafisch: $\vec{q}$ parallel verschieben (Start an Spitze von $\vec{p}$), Summenvektor vom Ursprung zur Endspitze.

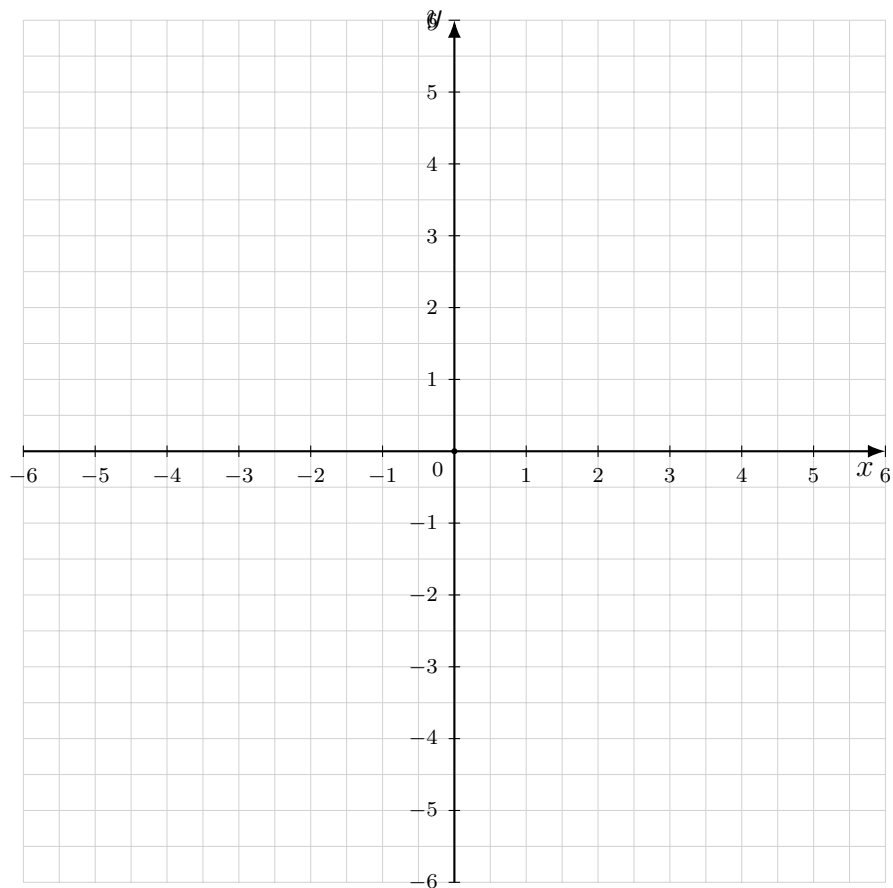


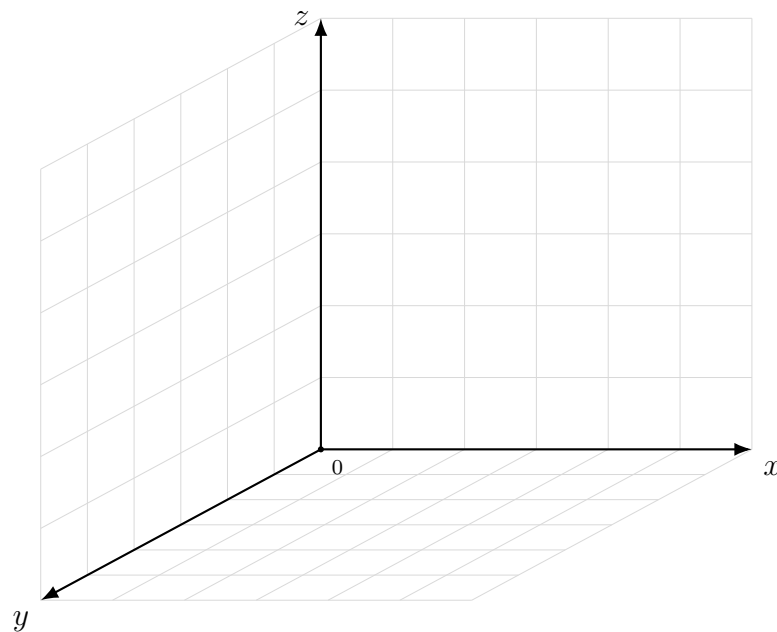
Mathematik-Übungen für Sandra

Hinweise (kurz)

- Zeichne in **jedem** Koordinatensystem mit Hilfsgitter.
- Nutze **Spitze-an-Fuß** oder die **Parallelogrammregel**.
- Gib am Ende jeweils den Summenvektor als Spaltenvektor an (Selbstkontrolle unten).

Vorlage 1: Koordinatensystem in $\mathbb{R}^2$ (zum Einzeichnen)



Vorlage 2: Koordinatensystem in $\mathbb{R}^3$ (zum Einzeichnen, z nach oben)**Aufgaben (4 Aufgaben)****Aufgabe 1 ($\mathbb{R}^2$):**

Zeichne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ in die $\mathbb{R}^2$ -Vorlage und konstruiere grafisch $\vec{a} + \vec{b}$. Gib zusätzlich das Ergebnis als Vektor an.

Aufgabe 2 ($\mathbb{R}^2$):

Zeichne $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und bestimme grafisch $\vec{u} + \vec{v}$. (Achte darauf, die Pfeile nicht zu „drehen“, nur zu verschieben.)

Aufgabe 3 ($\mathbb{R}^2$, KI-Transfer):

Eine KI kombiniert zwei „Signalrichtungen“:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeichne beide und bestimme $\vec{s} + \vec{t}$ grafisch. Beschreibe in einem Satz, was die Summe bedeutet (Gesamteinfluss).

Aufgabe 4 ($\mathbb{R}^3$):

Zeichne in die $\mathbb{R}^3$ -Vorlage:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und bestimme grafisch $\vec{p} + \vec{q}$. (Tipp: Zeichne erst $\vec{p}$, dann $\vec{q}$ vom Endpunkt von $\vec{p}$ aus parallel verschoben.)

Selbstkontrolle (nur Endergebnisse)

- Aufgabe 1: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
- Aufgabe 2: $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Aufgabe 3: $\vec{s} + \vec{t} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$
- Aufgabe 4: $\vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Mathematik-Unterricht für Sandra

Thema: Grafische Vektoraddition

Aufgabe 1 (Original-Wortlaut)

Aufgabe 1 ($\mathbb{R}^2$):

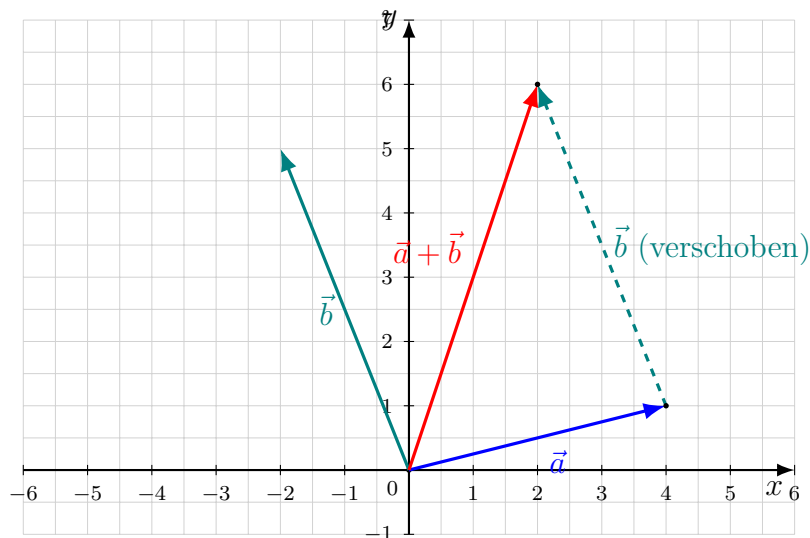
Zeichne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ in die $\mathbb{R}^2$ -Vorlage und konstruiere grafisch $\vec{a} + \vec{b}$. Gib zusätzlich das Ergebnis als Vektor an.

Endergebnis: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Ausführliche Lösung:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2 \\ 1 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Grafisch: $\vec{a}$ vom Ursprung zu $(4, 1)$ zeichnen. Dann $\vec{b}$ parallel verschieben, so dass sein Fußpunkt bei $(4, 1)$ liegt; die Spitze landet bei $(4 - 2, 1 + 5) = (2, 6)$. Summenvektor vom Ursprung nach $(2, 6)$.



Didaktische Hinweise / typische Probleme:

- *Fehler: Pfeil wird beim Verschieben gedreht.* Erinnerung: Nur parallel verschieben, Richtung und Länge bleiben gleich.
- *Ablesefehler am Gitter.* Achsenbeschriftung prüfen, ggf. Schrittweite bewusst machen.
- *Summenvektor falsch angesetzt.* Summenvektor startet am Ursprung (wenn beide vom Ursprung gegeben sind).

Aufgabe 2 (Original-Wortlaut)

Aufgabe 2 ($\mathbb{R}^2$):

Zeichne $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und bestimme grafisch $\vec{u} + \vec{v}$. (Achte darauf, die Pfeile

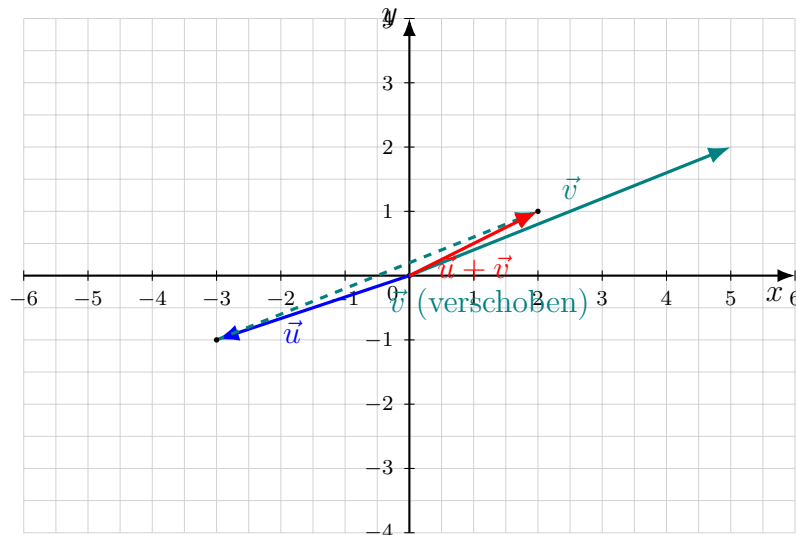
nicht zu „drehen“, nur zu verschieben.)

Endergebnis: $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ausführliche Lösung:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Grafisch: $\vec{u}$ zu $(-3, -1)$. Dann $\vec{v}$ vom Endpunkt $(-3, -1)$ aus: Spitze bei $(-3 + 5, -1 + 2) = (2, 1)$. Summenvektor vom Ursprung zu $(2, 1)$.



Didaktische Hinweise / typische Probleme:

- *Negatives Vorzeichen wird übersehen.* Start-/Endpunkt bewusst mit Koordinaten benennen.
- *Spitze-an-Fuß-Regel wird verwechselt.* Notfalls mit „Du gehst erst $\vec{u}$, dann $\vec{v}$ “ verbalisieren.

Aufgabe 3 (Original-Wortlaut)

Aufgabe 3 ($\mathbb{R}^2$, KI-Transfer):

Eine KI kombiniert zwei „Signalrichtungen“:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

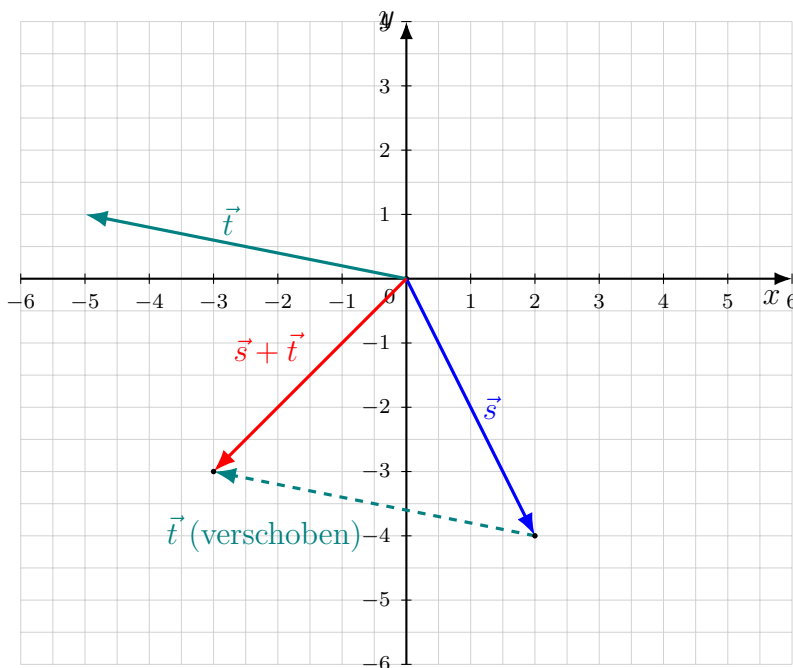
Zeichne beide und bestimme $\vec{s} + \vec{t}$ grafisch. Beschreibe in einem Satz, was die Summe bedeutet (Gesamteinfluss).

Endergebnis: $\vec{s} + \vec{t} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ausführliche Lösung:

$$\vec{s} + \vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Grafisch: $\vec{s}$ zu $(2, -4)$, $\vec{t}$ parallel verschoben ab $(2, -4)$ endet bei $(2 - 5, -4 + 1) = (-3, -3)$.
 Summenvektor: $(0, 0) \rightarrow (-3, -3)$.
 Satz (Beispiel): „Die Summe ist die Gesamtrichtung, die entsteht, wenn beide Einflüsse gleichzeitig wirken.“



Didaktische Hinweise / typische Probleme:

- *Bezug zur KI bleibt vage.* Nachfragen: „Was wäre hier die resultierende Entscheidung/Richtung?“
- *Endpunkt-Kontrolle fehlt.* Endpunkt immer kurz rechnerisch plausibilisieren lassen.

Aufgabe 4 (Original-Wortlaut)

Aufgabe 4 ($\mathbb{R}^3$):

Zeichne in die $\mathbb{R}^3$ -Vorlage:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

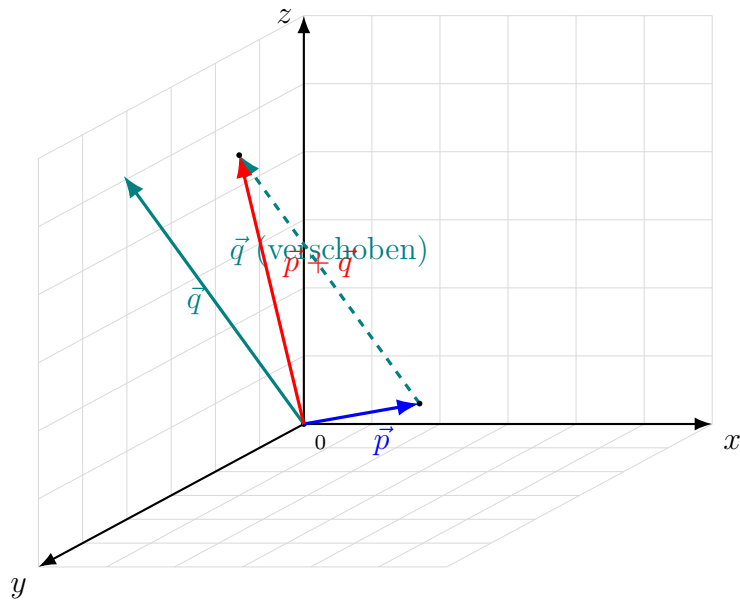
und bestimme grafisch $\vec{p} + \vec{q}$. (Tipp: Zeichne erst $\vec{p}$, dann $\vec{q}$ vom Endpunkt von $\vec{p}$ aus parallel verschoben.)

Endergebnis: $\vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ausführliche Lösung:

$$\vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Grafisch: $\vec{p}$ vom Ursprung zu $(3, 2, 1)$. Dann $\vec{q}$ parallel verschoben: Start bei $(3, 2, 1)$, Ende bei $(3 - 2, 2 + 1, 1 + 4) = (1, 3, 5)$. Summenvektor vom Ursprung nach $(1, 3, 5)$.
 Wichtig: In der Zeichnung zeigt die z -Achse nach oben.

**Didaktische Hinweise / typische Probleme:**

- *3D-Zeichnung wird als „echte Perspektive“ missverstanden.* Klarstellen: Es ist eine Zeichenkonvention; gerechnet wird komponentenweise.
- *z -Richtung verwechselt.* Immer: z zeigt nach oben; Achsenpfeile bewusst beschriften lassen.
- *Parallelverschiebung in 3D schwer.* Hilfslinien am Gitter (auf den Koordinatenebenen) nutzen.