

Hans Kreul
Harald Ziebarth

Mathematik leicht gemacht

7., erweiterte Auflage

Verlag
Harri
Deutsch 

Autoren:

Prof. Dr.-Ing. Hans Kreul lehrte an der Fachhochschule Zittau.

Er ist Mitbegründer von *Mathematik leicht gemacht* und Autor zahlreicher weiterer mathematischer Lehrbücher.

Harald Ziebarth ist Privatlehrer für Mathematik, Biologie und Chemie. Er ist Mitautor zahlreicher Mathematikbücher für die Oberstufe.

Sein Spezialgebiet ist die Aufarbeitung mathematischer Grundlagen zur Vorbereitung der gymnasialen Oberstufe und des Grundstudiums. Als Angestellter des *Studienkreises* hat er zu diesem Zweck spezielle Unterrichts- und Kursmaterialien entwickelt.

Er betreut fachlich die Niederlassungen in Bonn und ist als leitender Tutor und Supervisor in einem der größten deutschsprachigen Internet-Foren zur Schulmathematik tätig.

Webseite zum Buch:

<http://www.harri-deutsch.de/1836.html>

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1836-6

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus – sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Text berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetze als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

7., erweiterte Auflage 2009

© Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2009

Satz: Satzherstellung Dr. Naake <www.naake-satz.de>

Druck: fgb · freiburger graphische betriebe <www.fgb.de>

Printed in Germany

Vorwort zur 7. Auflage

Die Neugestaltung von *Mathematik leicht gemacht* in der letzten Auflage wurde von Lesern und Dozenten gut angenommen. Dies kam insbesondere durch Zuschriften an den Verlag oder über die begleitende Internetseite zum Ausdruck, in denen auch zusätzliche Themenwünsche geäußert wurden. Von dieser Möglichkeit sollten auch bei dieser Auflage möglichst viele Benutzer des Buches wieder Gebrauch machen!

Eine weitere Quelle für Anregungen waren die Vorschläge von Kolleginnen und Kollegen mit ihren Erfahrungen aus dem Unterricht. Diese Rückmeldungen und meine eigenen Beobachtungen bei Schülern und Studenten waren der Anlass zu verschiedenen, rund 130 Seiten umfassenden, Ergänzungen:

- Im Kapitel Algebra werden jetzt auch die biquadratischen Gleichungen und die höheren Polynomgleichungen behandelt.
- Im Anhang steht den Lesern ein ausführliches Glossar zur Verfügung, welches bei Fragen zu mathematischen Fachbegriffen Erste Hilfe leistet. Neben kurzen Erklärungen werden auch die Zusammenhänge mit anderen Begriffen aufgezeigt. In Kombination mit dem erweiterten Sachwortverzeichnis und den Verweisen auf notwendiges Vorwissen in den jeweiligen Abschnitten, dürften Quereinstiege nun noch einfacher gelingen.
- Für zahlreiche Themenbereiche gibt es zusätzliche Einstiegsaufgaben.
- Bei ausgewählten Aufgaben werden neben dem Endergebnis nun auch Hinweise zum Auffinden der Lösung gegeben.

Neben den o. g. Rückmeldungen haben zum Gelingen dieser neuen Auflage insbesondere folgende Personen beigetragen, bei denen ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken möchte:

Mein kollegialer Freund, Manfred Wagner aus Wittlich, hat mir in unserer gemeinsamen Arbeit im Mathematik-Forum in den zurückliegenden Jahren durch zahlreiche Diskussionen Anstöße zu neuen Ideen gegeben.

Vom Verlag Harri Deutsch wurde ich auch wieder optimal unterstützt und namentlich mit den Herren Klaus Horn, Bernd Müller und Dr. Steffen Naake gab es eine gute Zusammenarbeit im Team. Herr Horn hielt in der Redaktion die Fäden zusammen und hat so manchen Aspekt der Schulmathematik kritisch kommentiert. Herr Müller in seiner Funktion als Lektor lieferte auch bei dieser Auflage für viele problematische Formulierungen die passenden Alternativen. Beide haben sich von der Idee des Fachwörterverzeichnisses so begeistern lassen, dass kaum ein Eintrag unkommentiert blieb.

Herr Dr. Naake setzte gekonnt und rasch meine groben Skizzen in aussagekräftige Abbildungen um. Zu allen meinen \LaTeX -Problemen fand er stets die perfekte Lösung. Seine abschließende Bearbeitung gab dem Buch die gewohnte äußere Form.

Herr Eberhard Weihermüller aus Bonn klärte nach ausführlicher Recherche die sprachliche Herkunft einiger Fachbegriffe.

Meine Frau Gabriele hat dafür Sorge getragen, dass der familiäre Alltag auch in den Phasen hohen Termindrucks nicht aus dem Ruder lief – dafür kann man auch nach 25 Ehejahren nicht dankbar genug sein! Unsere Söhne Tobias, Markus und Florian kontrollierten die neuen Aufgaben und deren Lösungen auf ihre Verständlichkeit.

Bornheim-Sechtem (Vorgebirge / Rheinland), im Juli 2009

Harald Ziebarth

Vorwort zur 6. Auflage

„Mathematik leicht gemacht“ ist kein neues Buch. Etliche Schüler- und Studentengenerationen haben schon mit ihm oder seinem Vorläufer „Moderner Vorkurs der Elementarmathematik“ gearbeitet.

Für die Neuauflage wurde der grundsätzliche Aufbau des Buches nicht verändert, er hat sich schließlich über Jahrzehnte hinweg bewährt.

Der gesamte Text wurde aber gründlich überarbeitet. Dabei konnten zahlreiche Änderungen in den Lehrplänen der Schulen und Universitäten berücksichtigt werden. Bei dieser Gelegenheit wurden auch Tippfehler im bisherigen Manuskript korrigiert und einige Begriffe dem aktuellen Sprachgebrauch angepasst. Außerdem wurde das Sachwortverzeichnis deutlich erweitert.

Die Übungsaufgaben, die neben dem Lehrtext eine tragende Rolle in diesem Buch einnehmen, sind an einigen Stellen durch zusätzliche, einfachere Einstiegsaufgaben ergänzt worden. Zur besseren Orientierung finden die Leser am Anfang des Buches ein eigenes Verzeichnis der Aufgaben. Die Übungen selbst werden durch Zwischenüberschriften nach Problemfeldern aufgeteilt und haben nun auch einen entsprechenden Verweis auf die Seiten mit den zugehörigen Lösungen bekommen. Diese bessere Strukturierung wird eine schnellere Orientierung für Lernende und Lehrende ermöglichen und dadurch den Übungswert des Buches erhöhen.

Leistungsfähige Taschenrechner und Computer sind für die meisten Schüler und Studenten heute eine Selbstverständlichkeit, was leider aber nicht bedeutet, dass sie von ihren Besitzern auch optimal zur Lösung von rechnerischen Problemen oder für ein besseres Verständnis von mathematischen Zusammenhängen eingesetzt werden können. Deshalb finden sich bei den einzelnen Themen zahlreiche, durch verschiedene Logos gekennzeichnete Hinweise und Tipps für den *sinnvollen* Einsatz von Taschenrechner und PC.

Damit Schüler und Studierende von Anfang an optimal mit diesem Buch arbeiten können, werden die wichtigsten Struktur- und Orientierungsmerkmale des Buches in einem einführenden Abschnitt aufgelistet und kommentiert. Lehrern und Dozenten, die die bisherigen Auflagen in ihren Lehrveranstaltungen genutzt haben, gelingt so der reibungslose Wechsel auf die aktuelle Auflage.

Alle Änderungen und Erweiterungen haben den Umfang des Buches um fast 100 Seiten anwachsen lassen.

Nach Monaten der intensiven Arbeit möchte ich hier die Gelegenheit ergreifen und mich bei all denen bedanken, die auf die verschiedenste Art zum Gelingen dieses Buches beigetragen haben:

Mein Dank geht an Herrn Professor Kreul und den Verlag Harri Deutsch für das Vertrauen, die neue Auflage besorgen zu dürfen.

Bei der Überarbeitung wurde ich vom Verlag tatkräftig unterstützt: Herr Horn von der Verlagsredaktion hat den gesamten Produktionsablauf koordiniert und war jederzeit bei kleinen und großen Problemen ein hilfreicher Ansprechpartner. Daneben hat er die \LaTeX -Datei zur besseren Strukturierung der Aufgaben und Lösungen geschrieben. Herr Müller hat als Lektor mit seinen fachlichen und textlichen Anregungen sehr zum Wesen der neuen Auflage beigetragen. Mit großem Engagement wurden von Herr Dr. Naake verschiedene Abbildungen überarbeitet. Er gab wertvolle Hilfestellung bei \LaTeX -Problemen und hat mit unermüdlicher Geduld den abschließenden Satz erledigt.

Auch dem *Studienkreis* ist zu danken, da die Geschäftsführung dem Projekt zugestimmt hat.

Zahlreiche Kolleginnen und Kollegen haben durch wertvolle Hinweise und fachliche Anregungen ebenso zu diesem Buch beigetragen wie eifrig rechnende Schülerinnen und Schüler. Besonders deren Hinweise auf die eine oder andere missverständliche Passage im Manuskript führte zu einer Überarbeitung von Textstellen und Beispielen.

Last, but not least möchte ich mich bei meiner Frau bedanken, die mir in den letzten Monaten viele Verpflichtungen abgenommen hat, sodass ich mich intensiv mit diesem Manuskript beschäftigen konnte. Ebenfalls gilt mein Dank unseren Söhnen Tobias, Markus und Florian, die – jeweils ihrem Alter entsprechend – alle drei eifrig einen großen Teil der Aufgaben zur Kontrolle durchgerechnet und das gesamte Projekt durch kritische Kommentare begleitet haben.

Ihnen allen gilt mein Dank!

Bornheim (Rheinland), im September 2006

Harald Ziebarth

Lehrbücher sollen anlockend sein.
Das werden sie nur, wenn sie die heiterste
und die zugänglichste Seite des Wissens und
der Wissenschaft darbieten.

Johann Wolfgang von Goethe, 1749–1832

Vorwort zur 5. Auflage

Der Titel dieses Buches mag manchem ungläubwürdig erscheinen:

„Mathematik leicht gemacht“,

das gibt es doch gar nicht! Denn viele haben in ihrer Schulzeit ganz andere Erfahrungen machen müssen. Mathematik ist ein ungeliebtes Unterrichtsfach, mit dem man sich nur sehr ungern beschäftigt.

Woran liegt es, dass diese Meinung so verbreitet ist? Auf diese Frage mag es sehr unterschiedliche Antworten geben. Ein Grund liegt sicherlich darin, dass in der Mathematik – mehr als in jedem anderen Schulfach – das Neue auf dem vorher Gelernten aufbaut. Wer also einmal den Anschluss verpasst hat, der wird es schwer haben, „mitzukommen“ bzw. mit gutem Erfolg weiter arbeiten zu können, und schnell lässt dann die Lust an diesem Fach nach. Das hat zur Folge, dass die Lücken im Lehrstoff immer größer werden und dass es damit umso schwerer wird, erfolgreich weiter zu lernen. Dazu kommt oft die Einschätzung: „Ich bin für die Mathematik sowieso nicht begabt“, womit gleichzeitig eine Entschuldigung für schlechte Noten vorprogrammiert ist. Diese etwas vereinfacht dargestellte „Spirale abwärts“ dürfte im Schüleralltag weithin verbreitet sein. Und sie setzt sich fort: Wer in der Schule die Mathematik nicht verstanden hat, tut sich auch bereits zu Beginn der weiteren Ausbildung an Ingenieur- und Fachhochschulen schwer.

Nun soll hier nicht etwa der Anspruch erhoben werden, mit diesem Buch alle Schüler gleichermaßen zu erfolgreichen Mathematikern ausbilden zu können. Wir möchten aber den Lernenden mit diesem Lehrbuch ein Hilfsmittel in die Hand geben, das sie befähigt, die *Rechentechniken der elementaren Mathematik* zu verstehen und sie sicher zu beherrschen. Wer das Vorurteil „das kann ich sowieso nicht“ einen Moment beiseite lässt und beginnt, mit dem Buch zu arbeiten, der wird bald feststellen, dass vieles gar nicht so sehr schwierig ist.

Dies ist kein neues Buch – wir müssten sonst mit unseren Prognosen vorsichtiger sein. Es ist bereits die fünfte Auflage eines seit vielen Jahren verwendeten Lehrbuches. Ursprünglich als Lehrbriefe konzipiert, wurde daraus vom Autor unter Mitarbeit der Herren Dipl.-Math. KLAUS KULKE † (Zittau), Dipl.-Ing. HEINZ PESTER † (Limbach-Oberfohna) und Dipl.-Gew.-Lehrer ROLF SCHROEDTER (Dresden) ein Lehrgang in Buchform entwickelt, der dann viele Jahre unter dem Titel *Moderner Vorkurs der Elementarmathematik* erschien.

Die für ein Mathematik-Lehrbuch, das nicht lehrplangebunden eingesetzt wird, ungewöhnliche sechsstellige Auflagenhöhe ist ein Zeichen dafür, dass es von den Lernenden

gut angenommen wird. Dies veranlasste Autor und Verlag zu einer erneuten vollständigen Überarbeitung und Modernisierung des Werkes, die nunmehr vorliegt.

Wie schon in früheren Auflagen haben auch diesmal wertvolle Hinweise von Lehrenden und Lernenden an allgemeinbildenden, Techniker- und Fachhochschulen Eingang gefunden, für die wir an dieser Stelle danken.

Schließlich sei dem Autor noch eine ganz persönliche Bitte an die Benutzer dieses Buches gestattet. Wenn man als Lehrer vor einer Klasse steht, dann merkt man im Allgemeinen sofort, ob der dargebotene Lehrstoff beim Schüler „ankommt“ oder nicht, und man kann sich im weiteren Verlauf des Unterrichts an die jeweilige Hörschaft anpassen. Der Autor eines Buches dagegen hat in dem Augenblick, in dem er sein Manuskript schreibt, keinen unmittelbaren Kontakt zum Leser. Er ist sich aber dessen bewusst, dass es kein vollkommenes Buch geben kann, das die Ansprüche aller Leser völlig befriedigt. Außerdem lässt es sich in der mathematischen Literatur auch bei sorgfältigster Bearbeitung kaum vermeiden, dass sich – meist an den unglücklichsten Stellen – Druckfehler einschleichen, die dem Studierenden dann unnötiges Kopfzerbrechen bereiten. Wenn Sie Verbesserungsvorschläge haben, wenn Sie Druckfehler entdecken, so teilen Sie uns diese bitte mit.

Zu guter Letzt ist es dem Autor ein Bedürfnis, den Herren Klaus Horn (Verlag Harri Deutsch), Heinz Waurick (Korrektorat) und Dr. Steffen Naake (Satz) für ihre sorgfältige und zuverlässige Arbeit zu danken, mit der sie maßgeblich zum Gelingen dieses Werkes beigetragen haben.

Ganz im Sinne Goethes wünschen wir allen Lesern viel Freude am Lernen und gute Lernerfolge.

Zittau, im August 2002

Hans Kreul

Hinweise zur Benutzung des Buches

Ziel des Buches ist ein Einstieg in die Mathematik ohne Voraussetzungen; es reicht die Bereitschaft zum Lesen und zum gründlichen Üben. Es regt an, mit dem Wissen, das dieses Buch vermittelt, je nach Bedarf in weitere Gebiete der Mathematik, vielleicht sogar in die „Höhere Mathematik“ einzusteigen. Das Buch stellt das „mathematische Handwerkszeug“ bereit, das jeder souverän beherrschen muss, der tiefer in die Mathematik eindringen möchte.

Für wen wurde dieses Buch geschrieben?

Dieses Buch wurde für Personen¹⁾ geschrieben, die sich mit der Mathematik der Mittelstufe (bis einschließlich Jahrgangsstufe 10) beschäftigen möchten – oder auch müssen. Dies sind vor allem

Schüler, die mit diesem Buch

- den aktuellen Unterrichtsstoff nacharbeiten und einüben möchten;
- sich auf jahrgangsübergreifende Lernstanderhebungen, die Abschlussprüfung in der Jahrgangsstufe 10 oder auf einen Einstellungstest vorbereiten wollen;
- die Themen der Mittelstufenmathematik wiederholen, um auf einer weiterführenden Schule die teilweise massiven Probleme mit den Grundlagen aus der Mittelstufe zu beheben;

Berufsschüler und Meisteranwärter, die eine bessere Basis für ihre berufsspezifische Mathematik schaffen wollen;

Studenten von Fach- und Hochschulen, die vor dem Studium oder im ersten Semester Defizite aufarbeiten möchten;

Teilnehmer von Volkshochschulkursen;

Lehrer und Dozenten, die Eingangs- und Brückenkurse durchführen;

Nachhilfelehrer, die Übungsmaterial für ihre Schüler oder ein Arbeitsbuch für Ferienkurse benötigen;

Eltern, die ihren Kindern auf Fragen zur Mathematik eine Antwort bieten möchten;

Berufstätige, die auf dieses Buch zurückgreifen, um die Grundlagen aufzufrischen oder Neues zu erarbeiten, damit sie den gewachsenen Anforderungen in der beruflichen Fort- und Weiterbildung nachkommen können.

Struktur des Buches

Dem Lernenden soll die Möglichkeit geboten werden, sich auf die wenigen Bereiche zu konzentrieren, deren Studium besonders dringlich erscheint. Deshalb sind die einzelnen Kapitel so aufgebaut, dass sie unabhängig voneinander erarbeitet werden können.


¹⁾ Begriffe wie Leser, Schüler usw. sind in geschlechtsneutraler Form zu verstehen. Wenn in diesem Buch von Lesern die Rede ist, sind damit nicht speziell die männlichen Leser, sondern alle Personen und somit auch die Leserinnen gemeint.



Am Anfang eines neuen Themenbereiches wird durch das nebenstehende Logo auf notwendiges *Vorwissen* hingewiesen, so dass Sie als Leser sofort erkennen, ob Sie das eine oder andere Thema noch einmal auffrischen müssen.


Innerhalb des Textes finden sich weitere Hinweise auf bereits an anderer Stelle besprochene Definitionen und Formeln. In jedem Kapitel werden Formeln und Definitionen, Abbildungen, Beispiele sowie Aufgaben eigenständig durchnummeriert. Der Hinweis auf Bild 3.4 verweist somit auf das dritte Kapitel und dort auf die vierte Abbildung. Versteht man einzelne Begriffe nicht, hilft sicherlich das Glossar oder ansonsten das ausführliche Register weiter.

Durchgängig werden im gesamten Buch die *Fachbegriffe* erklärt und um Informationen zur Wortherkunft ergänzt. Gerade an weiterführenden Schulen wird sehr viel Wert auf die mündliche Beteiligung im Unterricht und die richtige Verwendung der Fachtermini¹⁾ in den Klausuren gelegt. An den Hochschulen und in der dort empfohlenen Literatur gehören diese Begriffe zum normalen Sprachgebrauch. Sie werden sehr schnell erkennen, dass sich einige Begriffe oder Silben öfters wiederholen und Ihnen an ganz unterschiedlichen Stellen begegnen. Wenn Sie einmal gelernt haben, dass mit „Substitution“ ein Austausch gemeint ist, worauf das lateinische Verb „substituere“ in der Bedeutung „ersetzen, an die Stelle setzen“ hinweist, haben Sie alsbald auch eine gute Vorstellung, was sich in der Mathematik hinter einer *Variablensubstitution* oder einem *Substitutionsverfahren* verbergen könnte. Dass in der Chemie unter einer *Substitutionsreaktion* eine chemische Reaktion verstanden wird, bei der Atome oder Atomgruppen ausgetauscht werden, ist dann ebenso klar, wie der Begriff „Substitut“ aus dem Munde eines Wirtschaftswissenschaftlers. Die Bedeutung von „substituere“ werden Sie spätestens dann nicht mehr vergessen, wenn Ihnen der Obsthändler statt der gewünschten, aber leider ausverkauften Birnen, als *Substitut* nun Äpfel einpackt.

An passender Stelle wird im Text mit dem Symbol  auf *Übungsaufgaben* hingewiesen, die jeweils am Ende eines Abschnittes zu finden sind. Dort ist auch ein Hinweis auf die zugehörigen *Lösungen* angebracht.



Das Warndreieck weist auf typische *Anwendungsfehler* hin, aber auch auf kleine Tricks, mit denen man sie umgehen kann.

Hinweise, die zwar wichtig sind, aber den Lesefluss stören könnten, sind eingerückt und durch das Symbol  markiert.

Da die meisten Leser einen Taschenrechner und vielfach auch einen Computer besitzen, wird bereits im ersten Kapitel die Einsatzmöglichkeit elektronischer Hilfsmittel besprochen. Hinweise zur konkreten Anwendung in der Mathematik finden sich dann später bei den jeweiligen Themen.



Der Einsatz eines *Taschenrechners* (TR) wird durch das nebenstehende Logo signalisiert. Die Angabe der einzelnen Handlungsschritte soll es den Lesern

¹⁾ terminus (lat.): Abgrenzung. Die Terminologie beschreibt die Fachbegriffe eines Wissensgebietes.

ermöglichen, den Taschenrechner als alltägliches Rechenhilfsmittel einzusetzen und die volle Bandbreite seiner Funktionen zu nutzen. In diesem Buch orientieren wir uns in erster Linie an dem Modell *Casio fx-991 ES*, das eine enorme Leistungsfähigkeit mit einer einfachen, fast intuitiven Bedienbarkeit verbindet. Daneben sind die Hinweise aber auch so gestaltet, dass jedes andere Modell verwendet werden kann.

Programmierbare und grafikfähige Modelle werden bewusst nicht besprochen, da sie um ein Vielfaches teurer als normale Taschenrechner sind, z. Z. im Unterricht – wenn überhaupt – leider nur eine Nebenrolle spielen und meistens in den Prüfungen nicht zugelassen sind.

Neben der Nutzung als Rechenhilfsmittel können die Geräte auch zur Veranschaulichung von mathematischen Zusammenhängen eingesetzt werden.



Da auf den meisten Computern, sei es am Arbeitsplatz oder im Privatbereich, ein Tabellenkalkulationsprogramm installiert ist, werden auch Hinweise auf dessen mathematische Anwendungsmöglichkeiten gegeben.

Wegen seines hohen Verbreitungsgrades orientieren wir uns bei der Beschreibung der Befehle an *Excel*; vielfach können diese aber auch bei anderen Tabellenkalkulationsprogrammen (z. B. *Calc* aus der *OpenOffice*-Reihe) verwendet werden.

Der Einsatz einer Tabellenkalkulation ist didaktisch sinnvoll, da die Leser dadurch die Möglichkeit bekommen, eine allgemeine Lösung für ein mathematisches Problem zu erstellen, um diese dann mit den Zahlenangaben von speziellen Einzelsituationen schnell überprüfen zu können.

Zusätzlich zu den reinen Rechenprogrammen gibt es Computeralgebrasysteme (CAS), die auch Ausdrücke mit Variablen verarbeiten können.



Aus der großen Vielfalt der Programme wurde *Derive* ausgewählt, da dieses Programm gerne im Schul- und Hochschulbereich eingesetzt wird. Es ist einfach in der Handhabung und ermöglicht dem Benutzer ab Version 6.0 sogar eine schrittweise Darstellung von Lösungsprozessen.

Auch in der Mathematik gilt wie in jedem anderen Beruf der Grundsatz: Technische Hilfsmittel kann man erst dann effektiv nutzen, wenn man sich bestimmte handwerkliche Grundfertigkeiten erarbeitet hat. Und zu den handwerklichen Grundfertigkeiten der Mathematik gehören sicheres Zahlenrechnen sowie gefestigte Kenntnisse der elementaren mathematischen Grundgesetze.

Um die Informationen zu den Programmen oder Hinweise auf interessante Internetseiten auch nach Drucklegung möglichst aktuell zu halten, gibt es eine begleitende Internetseite, auf die ein Logo in diesem Buch aufmerksam macht.



Die Seite <http://www.harri-deutsch.de/1836.html> bietet Hinweise auf weiterführende Links¹⁾, Dateien für *Excel* und *Derive* zum Herunterladen und – sobald bekannt – Fehlerkorrekturen zum Buch. Die Links führen Sie zu nützlichen Programmen, die im Internet zur Verfügung gestellt werden. Mit deren Hilfe können Sie mathematische Zusammenhänge bildhaft darstellen oder sich in Form eines Trickfilmes veranschaulichen.

Inhalt des Buches

Auch wegen der gerade vermerkten Erkenntnis zu den Grundfertigkeiten im Zahlenrechnen wird im ersten Kapitel die Zahl, als Grundgröße der Mathematik, in ihren verschiedenen Darstellungsformen besprochen. Neben den *natürlichen Zahlen* lernen Sie die *Brüche* und *Dezimalbrüche* kennen. Die zahlreichen Übungsaufgaben geben ausreichend Gelegenheit, den Umgang mit den besprochenen Rechentechniken zu üben.

Das nächste Kapitel, *Arithmetik*²⁾, erklärt den Umgang mit mathematischen Ausdrücken, die auch Buchstabensymbole, so genannte Variable, enthalten. Es behandelt neben dem Rechnen mit Klammern das Potenzieren, das Wurzelziehen und das Logarithmieren.

Mit diesem Wissen aus der Arithmetik können Sie in der elementaren *Algebra*³⁾ das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen verstehen.

Ein weiteres Kapitel ist den *Funktionen* gewidmet: Der Erläuterung des allgemeinen Funktionsbegriffes, der zu den fundamentalen Begriffen der Mathematik zählt, schließt sich die detaillierte Behandlung der wichtigsten Funktionen der Elementarmathematik an.

Die Kapitel *Planimetrie* und *Goniometrie* beschäftigen sich mit der Geometrie von Flächen, insbesondere mit der von Dreiecken. Im Kapitel *Stereometrie* wird die Geometrie der Körper besprochen.

Den Abschluss bildet ein umfangreiches Glossar⁴⁾. In diesem Verzeichnis finden Sie zu den wichtigsten Fachwörtern kurze Erläuterungen. Auch die des Öfteren benötigten Formeln können Sie hier im Sinne einer kleinen Formelsammlung nachschlagen. Die Querverweise zu anderen Begriffen sollen Ihnen dabei helfen, die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Themen besser einordnen zu können.

¹⁾ *Link* ist die Kurzform von *Hyperlink*, einem elektronischen Querverweis. Durch Anklicken eines Hyperlinks gelangt man zu einem Bereich mit weiteren Informationen. Der Begriff *Link* wird als Kurzform für weiterführende Adressen im Internet verwendet.

²⁾ arithmos (griech.): die Zahl.

³⁾ Das Wort Algebra stammt von dem arabischen Wort „al-gabr“ ab, womit so viel wie „das Ausüben von Zwang“ gemeint ist. Im Laufe der Zeit ist aus dem ursprünglichen ‚Wiederherstellen‘ und ‚Einrenken von Knochen‘ ein weniger brutales ‚Ausgleichen‘ durch Hinzufügen gleichwertiger Ausdrücke auf den beiden Seiten einer Gleichung geworden.

⁴⁾ glossarium (lat.), glossa (griech.): Zunge, fremdartiges Wort. Hier: Wörterverzeichnis mit Erklärungen.

Das Buch im Unterricht

Mit der Neubearbeitung liegt ein Buch vor, in dem das Augenmerk mehr als bisher auf die sinnvolle und effektive Nutzung heute vorhandener Rechenhilfsmittel gelegt wird, ohne dabei die von Lehrenden und Lernenden geschätzten Vorteile der bisherigen Fassungen – die leichtverständliche und anschauliche Darlegung des Lehrstoffes sowie die außerordentlich große Anzahl von Übungsaufgaben unterschiedlichsten Schwierigkeitsgrades für die einzelnen Stoffkomplexe – aufzugeben.

Durch die gewählte Anordnung des Lehrstoffes kann das Buch darüber hinaus sehr gut als Unterrichtshilfe in Lehrgängen der Volkshochschulen, betrieblichen Ausbildungsstätten oder ähnlichen Bildungseinrichtungen verwendet werden, in denen einzelne Teilgebiete der Mathematik behandelt werden sollen.

Der umfangreiche Lehrstoff wurde auf mehrere, voneinander unabhängig zu erarbeitende Teilkomplexe aufgeteilt, wobei die methodischen Gesichtspunkte bei der Behandlung der einzelnen Teilgebiete keineswegs außer Acht gelassen wurden. Es wird daher kaum möglich sein, den Lehrstoff im Unterricht in derselben Reihenfolge darzubieten, in der er hier im Lehrbuch angeordnet ist. Dies ist aber auch nicht erforderlich, denn das Buch bietet dem Lernenden die Möglichkeit, den im Unterricht behandelten Stoff zu wiederholen, zu ergänzen und ihn anhand zahlreicher Beispiele und Übungsaufgaben sich einzuprägen und zu festigen.

Das Buch zum Selbstlernen

Wenn Sie ohne Anleitung eines Lehrers selbstständig mit diesem Buch die Mathematik ergründen möchten, so benötigen Sie einen Leitfaden, an dem Sie sich orientieren können. Im Idealfall schlagen Sie das Buch auf der ersten Seite auf und gehen Thema für Thema durch. Das Inhaltsverzeichnis ist dabei ein guter Wegweiser.

Zwischendurch werden Sie selbst schon merken, ob Ihnen das eine oder andere Thema gut oder weniger gut gefällt. Inwiefern Sie „langweilige“ Themen überspringen können, lässt sich aus der Ferne nicht beurteilen und hängt in erster Linie von Ihrem Vorwissen ab. Sie werden aber sehr schnell ein Gefühl dafür bekommen, was Sie intensiv durcharbeiten müssen und was Sie überfliegen können – denn spätestens ein paar Seiten weiter stellt sich die Frage, ob Sie darauf aufbauende Zusammenhänge noch verstehen.

Nachfolgend möchten wir Ihnen einen typischen Vorbereitungsplan für den Übertritt in die Oberstufe an die Hand geben. Die Angaben zur Gewichtung sollen eine Richtschnur sein, wie intensiv das jeweilige Thema von Ihnen in den genannten Abschnitten zu bearbeiten ist:

K Kurze Wiederholung **G** Gründliches Durcharbeiten **I** Intensives Lernen und Üben

Für Ihren persönlichen Plan müssen Sie besonderes Augenmerk auf Ihr bisheriges Vorwissen legen! Bedenken Sie auch, dass es durch spezielle Vorgaben seitens Ihrer Lehranstalt im Einzelfall zu Abweichungen kommen kann.

Übungsplan zur Vorbereitung auf die Sekundarstufe II

Bruchrechnung	Grundlagen: 1.2.2 K ; 1.2.3 K ; 1.2.3.8 I ; 1.2.4.5 – 1.2.4.7 G .
Taschenrechner	Speichern; Berechnen von Termen: 1.3.1 K .
Klammerrechnung	Ausmultiplizieren; Ausklammern; Binome; Quadratische Ergänzung: 2.3.2 I .
Bruchterme	2.3.3 G .
Potenzrechnung	Potenzen, Potenzgesetze; PASCALSches Dreieck; Polynomdivision: 2.4 I .
Wurzelrechnung	Wurzeln, Wurzelgesetze; Nenner rational machen; Teilradizieren: 2.5 G .
Gleichungen	Prinzip: 3.1.1 K , 3.1.2 I ; lineare Gl.: 3.1.3 I ; Ungleichungen: 3.1.4 G ; Betragsgl.: 2.3.1.2, 3.1.5 K ; Quadratische Gl., pq-Formel, Diskriminante, Vieta: 3.5.1 – 3.5.4 I ; Biquadratische Gl.: 3.5.8 I ; Höhere Gl.: 3.6 I .
LGS	Nur 2er- und einfache 3er-Gleichungssysteme: 3.4 I .
Prozentrechnung	3.3.1 – 3.3.5 K .
Funktionen	Allgemeines: 4.1 – 4.3 K ; Lineare Funktionen: 4.4 I ; Quadratische Funktionen: 4.5 I .
Geometrie	Fläche und Umfang Dreieck: 5.4, 5.11.2 K ; Viereck: 5.5, 5.11.1 K ; Kreis: 5.11.5 K . Strahlensätze: 5.8.3 K ; PYTHAGORAS: 5.9 I . Goniometrie, speziell Tangens: 6.1, 6.2, 6.3.1 G .

Nachdem diese Themen im Unterricht abgehandelt sind, werden Sie zusätzlich den Abschnitt 2.6 zu den Logarithmen bearbeiten und Ihr Wissen über die Winkelfunktionen vertiefen müssen.

Für die Vorbereitung eines Studiums können Sie die Liste im Prinzip übernehmen, sollten aber je nach Fachrichtung die Geometrie intensiver einplanen. Darüber hinaus müssen Sie natürlich noch zusätzlich die notwendigen Bereiche der Oberstufenmathematik präsent haben.

Benutzen Sie das Buch parallel zu einer Lehrveranstaltung, so können Sie nach Belieben einsteigen. Die Vermerke zum notwendigen Vorwissen, die Querverweise im Text und das Register helfen Ihnen bei der Orientierung.

Möchten Sie sich mit diesem Buch auf eine Prüfung vorbereiten, so ergibt sich oftmals als typische Lernsituation, dass Sie drei Wochen vor einer Prüfung noch 65 Seiten durcharbeiten müssen. Somit sind pro Woche ungefähr 22 und pro Tag rund 3 Seiten zu bewältigen. Diese Seitenaufteilung sollte nur eine grobe Voreinteilung sein, denn:

■ Lernen Sie immer nach *Themengebieten* und nicht nach Seitenzahlen!

Versuchen Sie den Lerntext in überschaubare Themenblöcke einzuteilen, deren Umfang ungefähr mit der obigen Seitenaufteilung übereinstimmt. Das Tagesziel sollte deshalb nicht „3 Seiten“ lauten, sondern sich an einem Thema orientieren, was Sie in dieser Zeit bewältigen können: „Ich möchte heute das PASCAL'sche Dreieck verstehen und es anwenden können.“

Beachten Sie auch, dass Buchseiten mit Aufgaben meistens einen höheren Zeiteinsatz von Ihnen fordern als Textseiten.

Nachdem Sie den Text gelesen haben, sollten Sie unbedingt die zahlreichen im Buche vorgerechneten Beispiele sorgfältig durcharbeiten und erst dann zum nächsten Beispiel übergehen, wenn jeder Schritt der Rechnung erfasst ist und der gesamte, dem Problem zugrunde liegende Gedankengang überblickt wird. Manchmal wird in einem Beispiel nur der Lösungsweg skizziert und nicht jeder kleine Zwischenschritt ausformuliert, da man sonst vor lauter Nebenrechnungen die Grundidee aus den Augen verlieren würde. Es ist dann Ihre Aufgabe, dieses Beispiel in Ihrem Übungsheft selbstständig durchzurechnen und um die Zwischenschritte zu ergänzen. Dabei sollten die Nebenrechnungen nie wahllos und unsystematisch auf irgendwelchen Schmierzetteln niedergeschrieben werden, sondern man sollte sie mit genau derselben Sorgfalt ausführen wie die Hauptrechnung und sie auch mit in das eventuell vorhandene Rechenschema einordnen.

Wenn Sie glauben, alles verstanden zu haben, dann sollten Sie unbedingt die Übungsaufgaben zu dem Thema bearbeiten. Ihr Ergebnis vergleichen Sie bitte *sofort* mit der Lösung am Ende des Buches. Es ist nicht sinnvoll, erst mehrere Aufgaben zu berechnen und dann die Lösungen zu kontrollieren. Haben Sie nämlich einen grundsätzlichen oder systematischen Fehler gemacht, so üben Sie ihn nur unsinnigerweise ein.

Stimmen die Ergebnisse überein, sollten Sie noch weitere Aufgaben rechnen, bis Sie sich in der Thematik sicher fühlen.

Meist sind die einzelnen Übungen einer Aufgabe nach Schwierigkeitsgraden geordnet, sodass auf die einfachen Einstiegsaufgaben immer anspruchsvollere folgen.

Ist es aus Zeitgründen nicht möglich, sich mit allen Unteraufgaben zu beschäftigen, so versuchen Sie zumindest nach dem Motto *Anfang – Mitte – Ende* einen repräsentativen Querschnitt zu bearbeiten.

Gibt es Abweichungen zum Ergebnis im Lösungsteil, so sollten Sie unbedingt die Ursache dafür ergründen. Haben Sie die Aufgabenstellung richtig abgeschrieben? Können Sie einen Fehler in Ihrem Ansatz oder im Rechenweg finden? Gibt es eine Möglichkeit, die Zwischenschritte in Form einer Probe zu kontrollieren? Können Sie mithilfe eines Taschenrechners oder eines Computeralgebrasystems den Fehler einkreisen?

Liegt wirklich ein Fehler vor oder wurde nur eine andere Schreibweise verwendet? Beispielsweise ist das berechnete Ergebnis $0,5x$ nur anders geschrieben als das mit $x/2$ im Lösungsabschnitt angegebene.

Sollten jedoch wesentliche Abweichungen von dem im Lösungsteil angegebenen Resultat auftreten, so muss der eingeschlagene Lösungsweg noch einmal genau durchdacht und kontrolliert werden. – Schließlich lasse man sich durch falsche Ergebnisse keinesfalls entmutigen! Aus jedem Fehler, den man macht, kann man neue und wichtige Erkenntnisse für seine weitere Arbeit gewinnen.

Nur derjenige wird seine Sicherheit im Anwenden der verschiedenen Rechengesetze erfolgreich überprüfen können, der die Aufgaben in der beschriebenen Weise löst. Durch die am Ende des Buches angegebenen Lösungen sollte man sich aber keinesfalls dazu verleiten lassen, die eigene Rechnung so „hinzubiegen“, dass man auf die gewünschte Lösung kommt. Diese Vorgehensweise schadet mehr als sie nützt, denn in diesem Falle hat man meist nur die Lösung im Auge, auf die man unbedingt kommen will. Man rechnet dann gedankenlos darauf zu, ohne sich zu überlegen, warum man die einzelnen Rechenschritte unternimmt.

Die Lerngruppe

Die Effizienz einer Lerngruppe oder eines Nachhilfeunterrichtes hängt – eine fähige Lehrkraft vorausgesetzt – in erster Linie von der Vorbereitung des Schülers ab. Gehen Sie nie in eine Sitzung, ohne sich vorher konkrete Fragen überlegt zu haben! Fallen Ihnen keine Fragen ein, so rechnen Sie genügend Aufgaben zu dem aktuellen Themengebiet, trennen mithilfe der Lösungen im Anhang die richtigen von den falschen Ergebnissen und sprechen die Problemfälle mit der Lehrkraft durch.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse und Lösungswege auch mit denen Ihrer Mitschüler und suchen Sie die Diskussion mit Ihrem Lehrer oder Tutor¹⁾.

Im Zeitalter des Internets haben Sie auch die Möglichkeit, Ihre Fragen oder Rechenergebnisse in einem Forum zur Schulmathematik zu veröffentlichen. In solchen Diskussionsgruppen bekommen Sie meist recht schnell eine Antwort und eine Kontrolle Ihres Rechenweges.

Da es im Internet aber jedermann möglich ist, sich zu Ihrer Anfrage zu äußern, haben Sie leider keine Garantie für die Richtigkeit dieser Stellungnahme. Zuverlässiger sind da betreute Foren, in denen erfahrene Tutoren sich Ihrer Probleme annehmen.

Wer dieses Buch in der angeführten Weise bewusst und gründlich durcharbeitet, der wird bald feststellen, dass es gar nicht so schwierig ist, Mathematik zu erlernen, wie es häufig hingestellt wird. Es wird sich zeigen, dass der Erfolg bei fleißiger Arbeit und fortwährendem Üben nicht ausbleibt. Ein gediegenes Können in der elementaren Mathematik wird aber nicht nur das Studium der höheren Mathematik, sondern auch das Studium fast aller anderen Unterrichtsfächer, vor allem der technischen Wissenschaften, günstig beeinflussen.

¹⁾ tutor (lat.): Bewahrer, Beschützer, Vormund. Hier: Betreuer einer Lerngruppe.

So geht es weiter

Wer sich mit dem Inhalt des Buches erfolgreich beschäftigt hat, ist gerüstet, sich weiteren Themen zuzuwenden. Der Lehrplan sieht im Allgemeinen vor:

Analysis

- Differenzialrechnung
- Integralrechnung

Lineare Algebra und Vektorrechnung

Stochastik

- Kombinatorik
- Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Beschreibende Statistik
- Beurteilende Statistik

Hinweise zum Einstieg in diese Gebiete finden Sie auf der begleitenden Internetseite zum Buch.

Rückmeldungen

Abschließend sei an dieser Stelle aus dem Vorwort von Herrn Professor Kreul zu einer früheren Auflage zitiert:

„Schließlich sei dem Autor noch eine ganz persönliche Bitte an die Benutzer dieses Buches gestattet. Wenn man als Lehrer vor einer Klasse steht, dann merkt man im Allgemeinen sofort, ob der dargebotene Lehrstoff beim Schüler ‚ankommt‘ oder nicht, und man kann sich im weiteren Verlauf des Unterrichts an die jeweilige Hörschaft anpassen.

Der Autor eines Buches dagegen hat in dem Augenblick, in dem er sein Manuskript schreibt, keinen unmittelbaren Kontakt zum Leser. Er ist sich aber dessen bewusst, dass es kein vollkommenes Buch geben kann, das die Ansprüche aller Leser völlig befriedigt. Außerdem lässt es sich in der mathematischen Literatur auch bei sorgfältigster Bearbeitung kaum vermeiden, dass sich – meist an den unglücklichsten Stellen – Druckfehler einschleichen, die dem Studierenden dann unnötiges Kopfzerbrechen bereiten.“

Um den Kontakt zwischen den Lesern und den Autoren zu verbessern, möchten wir Ihnen ebenfalls auf der begleitenden Internetseite einen E-Mail-Kontakt anbieten: Wenn Sie Verbesserungsvorschläge haben, weiter gehende Aufgaben wünschen oder Druckfehler entdecken, so teilen Sie uns dies bitte mit, damit wir es in der nächsten Auflage berücksichtigen können!

Autoren und Verlag Harri Deutsch
Gräfstraße 47
D-60486 Frankfurt am Main
verlag@harri-deutsch.de
<http://www.harri-deutsch.de>