Hans Kreul
Harald Ziebarth

Mathematik leicht gemacht

7., erweiterte Auflage

Verlag Harri Deutsch

Autoren:

Prof. Dr.-Ing. Hans Kreul lehrte an der Fachhochschule Zittau.
Er ist Mitbegründer von *Mathematik leicht gemacht* und Autor zahlreicher weiterer mathematischer Lehrbücher.

Harald Ziebarth ist Privatlehrer für Mathematik, Biologie und Chemie. Er ist Mitautor zahlreicher Mathematikbücher für die Oberstufe.
Sein Spezialgebiet ist die Aufarbeitung mathematischer Grundlagen zur Vorbereitung der gymnasialen Oberstufe und des Grundstudiums. Als Angestellter des *Studienkreises* hat er zu diesem Zweck spezielle Unterrichts- und Kursmaterialien entwickelt.
Er betreut fachlich die Niederlassungen in Bonn und ist als leitender Tutor und Supervisor in einem der größten deutschsprachigen Internet-Foren zur Schulmathematik tätig.

Webseite zum Buch:
http://www.harri-deutsch.de/1836.html

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische
Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1836-6

7., erweiterte Auflage 2009

Satz: Satzherstellung Dr. Naake <www.naake-satz.de>
Druck: fgb · freiburger graphische betriebe <www.fgb.de>
Printed in Germany

d) $\dfrac{6x^2\left(x^3-x^2\right)-2x^3\left(3x^2-2x\right)}{\left(x^3-x^2\right)^3}$ e) $\dfrac{4x\left(x^2-2\right)\cdot 3-\left(6x^2-3\right)\cdot 2x}{\left(x^2-2\right)^2}$

f) $\dfrac{\left(20x^3-150x\right)\cdot\left(14x^2+35x^4\right)-\left(5x^4-75x^2\right)\cdot(28x+140x)}{\left(14x^2+35x^4\right)^2}$

g) $\dfrac{\left(288x^3+36-126x\right)\cdot\left(72x^4-36x+63x^2\right)-\left(72x^4+36x-63x^2\right)\cdot\,\ldots}{\left(72x^4+36x-63x^2\right)^2}$ $\dfrac{\ldots\cdot\left(288x^3-36+126x\right)}{\ldots}$

h) $\dfrac{(3x-7)\cdot(63-27x)-(42x-98)\cdot 119}{-(133-57x)^3}$

i) $\dfrac{(3x^k+6)(x^6-4^5)+48(x^k+2)x^3-72(x^{2+k}+2x^2)+3\,072x^k+6\,144}{x(9x^{k+2}+18x^2)}$

2.5 Wurzelrechnung

Abschnitt 2.4: Potenzrechnung
Abschnitt 2.3.1.2: Betrag
Abschnitt 1.2.2.3: Primfaktorzerlegung

2.5.1 Radizieren als erste Umkehrung des Potenzierens

2.5.1.1 Der Wurzelbegriff

Für die beiden direkten Rechenarten erster und zweiter Stufe, die Addition und die Multiplikation, gilt das *Kommutativgesetz*

$$a+b=b+a \qquad \text{und} \qquad a\cdot b=b\cdot a$$

Deswegen hat jede dieser beiden Rechenarten auch nur *eine* Umkehrung: Die Umkehrung der Addition ist die Subtraktion, die Umkehrung der Multiplikation ist die Division.

Das Kommutativgesetz gilt aber *nicht* für die Potenzrechnung, die direkte Rechenart dritter Stufe, denn es ist

$$a^n \neq n^a.$$

Aus diesem Grund muss die Potenzrechnung zwei Umkehrungen besitzen.

Ist aus der Potenzgleichung

$$a^n = b$$

bei bekanntem $n \in \mathbf{N}^*$ und $b \geq 0$ die Basis a zu bestimmen, so führt dies auf die **Wurzelrechnung**, auch **Radizieren** [1)] genannt.

Für diese neue Rechenart muss eine neue Symbolik eingeführt werden. Man schreibt

$$a^n = b \quad \Leftrightarrow \quad a=\sqrt[n]{b}.$$

Gelesen wird die Gleichung $a=\sqrt[n]{b}$ als „a ist die n-te Wurzel aus b“.

[1)] radix (lat.) die Wurzel

Für nicht negative Werte von a und b drücken demnach die beiden Gleichungen

$$a^n = b \qquad \text{und} \qquad a = \sqrt[n]{b}$$

denselben Sachverhalt aus; sie sind nur nach verschiedenen Größen aufgelöst.

Bei der *Potenzrechnung* ist der Potenzwert b gesucht, den man erhält, wenn man die gegebene Basis a so oft mit sich selbst multipliziert, wie das der Exponent n vorschreibt.

Dagegen wird bei der *Wurzelrechnung* die Basis a gesucht, die in die n-te Potenz erhoben werden muss, wenn man den Radikanden b erhalten will.

In $\sqrt[n]{b} = a$ nennt man

b	den **Radikanden**,
n	den **Wurzelexponenten**,
$\sqrt[n]{b}$	die **Wurzel** und
a	den **Wurzelwert**.

$$\underbrace{\sqrt[\text{W-Exp}]{\text{Radikand}}}_{\text{Wurzel}} = \text{Wurzelwert}$$

☞ Bei der zweiten Wurzel lässt man gewöhnlich den Wurzelexponenten 2 weg und schreibt in vereinfachter Form

$$\sqrt[2]{b} = \sqrt{b}\,.$$

Man nennt die zweite Wurzel auch *Quadratwurzel*, da sie die Seitenlänge a eines Quadrates mit dem Flächeninhalt a^2 angibt.
Entsprechend liefert die dritte Wurzel, die *Kubikwurzel* $\sqrt[3]{a^3}$, die Kantenlänge a eines Würfels [1)], dessen Volumen $V = a^3$ beträgt.

Die hier verwendete Definition des Wurzelbegriffes erlaubt nicht, Wurzeln aus negativen Zahlen zu ziehen. Es wird daher gefordert, dass der Radikand nicht negativ sein darf, also $b \geq 0$.

Bei geradem Wurzelexponenten ist dies offensichtlich: Setzen wir den Wurzelwert in eine gerade Potenz, so können wir niemals eine negative Zahl für den Radikanden zurück bekommen.

Bei ungeraden Wurzelexponenten findet man in der mathematischen Literatur zwei unterschiedliche Ansätze:

- Einige Autoren streben besonders in der Schulmathematik ein einheitliches Konzept an, indem sie festlegen, dass ein Radikand niemals negativ sein darf. Die n-te Wurzel wird – egal, ob der Wurzelexponent gerade oder ungerade ist – nur für nicht negative Radikanden definiert: $a = \sqrt[n]{b}$ für $b \geq 0$.
  Dies hat zur Folge, dass dann schon Gleichungen wie $x^3 + 1 = 0$ mit der offensichtlichen Lösung $x = -1$ nicht ohne Weiteres lösbar sind.

- Um auch solche Gleichungen durch Wurzelziehen lösen zu können, unterscheiden andere Autoren zwischen geraden und ungeraden Wurzelexponenten:

1) cubus (lat.) Würfel

gerader Wurzelexponent $a = \sqrt[2n]{b}$ für $b \geq 0$

ungerader Wurzelexponent $a = \sqrt[2n+1]{b}$ für $b \geq 0$

$a = \sqrt[2n+1]{b} = -\sqrt[2n+1]{|b|}$ für $b < 0$

Somit können diese Autoren *für ungerade Wurzeln auch negative Radikanden* akzeptieren.

Da für unsere weiteren Überlegungen diese Kontroverse zweitrangig ist, wollen wir uns hier dem Weg der Schulmathematik anschließen und die pädagogisch einfachere Variante benutzen. Wir definieren deshalb den Wurzelbegriff wie folgt:

Die n-te Wurzel aus $b \geq 0$ ist diejenige *nicht negative* Zahl a, deren n-te Potenz b ergibt:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^n = b \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt[n]{b} \\ \text{mit} \quad a, b \geq 0 \quad \text{sowie} \quad n \in \mathbf{N}^* \end{array}} \tag{2.51}$$

Entsprechend dieser Definition kann es keine negativen Wurzelwerte geben.

☞ Die Beschränkung auf *positive Wurzelwerte* ist nötig, wenn das Wurzelsymbol ein *eindeutiges Rechenzeichen* sein soll. Würde man nämlich diese Einschränkung nicht einführen, so könnte man z. B. dem Zeichen $\sqrt{4}$ zwei unterschiedliche Werte zuordnen, nämlich $+2$ und -2, denn es ist sowohl $(+2)^2 = 4$ als auch $(-2)^2 = 4$. Für Aufgaben der Art

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} - \sqrt{16} = \ ?$$

würde es dann eine ganze Reihe unterschiedlicher Lösungen geben.

Dagegen hat diese Aufgabe bei Beschränkung auf positive Wurzelwerte die eindeutige Lösung

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} - \sqrt{16} = 2 + 3 - 4 = 1.$$

Aus der Definition der Wurzel folgt für $b \geq 0$

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = \sqrt[n]{b^n} = b} \tag{2.52}$$

Bei nicht negativem Radikanden heben sich demnach Potenzieren und Radizieren mit dem gleichen Exponenten gegenseitig auf:

Das Radizieren ist die erste Umkehrung des Potenzierens.

Von diesem Satz wird Gebrauch gemacht, wenn nachgeprüft werden soll, ob eine Wurzel richtig berechnet worden ist.

☞ Die zweite Umkehrung der Potenzrechnung, die Logarithmenrechnung, wird im Abschnitt 2.6 behandelt.

Beispiel:

2.152 a) $\sqrt{0{,}0121} = 0{,}11$, denn $0{,}11^2 = 0{,}0121$.

$\sqrt[3]{-125}$ gibt es nicht: Laut unserer Definition der Wurzel darf der Radikand nicht negativ sein. Ein TR liefert aber möglicherweise den Wert -5.

$\sqrt[4]{256} = 4$, denn $4^4 = 256$.

b) Für $a \geq 0$ gilt

$$\sqrt[3]{a^{3n}} = a^n, \quad \text{denn} \quad (a^n)^3 = a^{3n}.$$
$$\sqrt[n]{a^{3n}} = a^3, \quad \text{denn} \quad (a^3)^n = a^{3n}.$$

✍ A. 2.121–2.122 auf Seite 238

Beim Rechnen mit Wurzeln sollte man immer auf die folgenden **Sonderfälle** achten:

1. Es ist stets

$$\boxed{\sqrt[n]{1} = 1} \tag{2.53}$$

denn für alle n ist $1^n = 1$.

2. Für alle $n \in \mathbf{N}^*$ gilt

$$\boxed{\sqrt[n]{0} = 0} \tag{2.54}$$

denn unter der genannten Voraussetzung ist $0^n = 0$.

3. Für $b \geq 0$ ist

$$\boxed{\sqrt[1]{b} = b} \tag{2.55}$$

denn es ist $b^1 = b$.

☞ Das Zeichen $\sqrt[1]{\ }$ wird im Allgemeinen nicht geschrieben. Bei $\sqrt[2]{\ }$ darf dagegen nur der Wurzelexponent 2 weggelassen werden. Bei allen übrigen Wurzeln *muss* der Wurzelexponent angegeben werden.

Für das Wurzelziehen stellen die meisten Geräte folgende Tasten bereit:

zweite Wurzel (Quadratwurzel) $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\sqrt{\square}}$

dritte Wurzel (Kubikwurzel) $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$

n-te Wurzel (Radizieren) $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ $\boxed{\sqrt[\square]{\square}}$ $\boxed{\sqrt[x]{y}}$

Über die Besonderheiten der Eingabereihenfolge bei veralteten Geräten siehe Abschnitt 1.3.1.5.

Aufgabe	**Tastenfolge**	**Ergebnis**
$\sqrt{306{,}25} = ?$	$\boxed{\sqrt{\ }}\,306{,}25\,\boxed{=}$	17,5
$\sqrt{6 \cdot 54} = ?$	$\boxed{\sqrt{\ }}\,\boxed{(}\,6\,\boxed{\times}\,54\,\boxed{)}\,\boxed{=}$	18
$\sqrt[3]{\dfrac{8}{343}} = ?$	$\boxed{\sqrt[3]{\ }}\,8\,\boxed{a\,^b/_c}\,343\,\boxed{=}$	$\dfrac{2}{7}$

Man beachte den Hinweis in Abschnitt 1.3.1.5, Beispiel 1.85!

$\sqrt[6]{4\,096} = ?$	$6\,\boxed{\sqrt[x]{\ }}\,4\,096\,\boxed{=}$	4

WURZEL(radikand) liefert die Quadratwurzel aus der positiven Zahl *radikand*.

Aufgabe	**Eingabe**	**Ausgabe**
$\sqrt{222{,}01} = ?$	**WURZEL**(222,01)	14,9

Die meisten Computerprogramme benutzen den Befehl **SQRT**(x) für die Quadratwurzel[1)] von x. *Derive* bietet zusätzlich noch ein Wurzelzeichen in der Symbolleiste an.

Höhere Wurzeln werden als Potenz mit gebrochenem Exponenten dargestellt, siehe Abschnitt 2.5.3.

✍ A. 2.123–2.124 auf Seite 238

2.5.1.2 Definitionsbereich und einschränkende Bedingungen

Da wir für den Radikanden und für den Wurzelwert nur nicht negative Zahlen zulassen, ist besonders darauf zu achten, welche Werte die Variablen in einer Wurzel annehmen dürfen und welche nicht. Die Menge der zulässigen Variablenwerte beschreibt den **Definitionsbereich D** eines Wurzelterms. Man bestimmt diese erlaubten Werte, indem man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, den Radikanden, größer oder gleich null setzt:

$$\text{Radikand} \geq 0$$

Steht die Wurzel als Faktor im Nenner eines Bruches, so schränkt sich diese Menge noch weiter ein, da man nicht durch die Null teilen darf.

Beispiel:

2.153 a) $\sqrt{5x}$ Es dürfen alle nicht negativen Zahlen für x eingesetzt werden:

$5x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \qquad \mathbf{D} = [\,0\,;\,+\infty\,)$

b) $\sqrt{11x^2}$ Hier sind alle Zahlen für x erlaubt, da ein *Quadrat niemals negativ* werden kann:

$11x^2 \geq 0 \qquad \mathbf{D} = (\,-\infty\,;\,+\infty\,)$

c) $\sqrt{-x}$ $\quad -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \qquad \mathbf{D} = (\,-\infty\,;\,0\,]$

d) $\sqrt{x+4}$ Damit der Radikand nicht negativ wird, muss $x + 4 \geq 0$ sein. Dies ist erfüllt, wenn x nur Werte größer oder gleich -4 annimmt:

$x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \qquad \mathbf{D} = [\,-4\,;\,+\infty\,)$

e) $\dfrac{18}{7\sqrt{2x}}$ Zusätzlich zu den unter a) genannten Einschränkungen darf x auch nicht den Wert null annehmen, da man sonst durch null teilen würde:

$2x > 0 \Rightarrow x > 0 \qquad \mathbf{D} = (\,0\,;\,+\infty\,)$

[1)] square root (engl.) Quadratwurzel

f) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}$ Setzt sich ein Term aus mehreren Wurzeln zusammen, so muss jede Wurzel und damit jeder Radikand einzeln bewertet werden und der Definitionsbereich des gesamten Ausdrucks ergibt sich als Schnittmenge der einzelnen Definitionsbereiche.
In diesem Beispiel erfordert die erste Wurzel, dass $x \geq 0$ ist, die zweite Wurzel erlaubt dagegen nur $x \geq 3$.
So wäre etwa $x = 2$ für die erste, nicht aber für die zweite Wurzel erlaubt.

$$\mathbf{D} = [\,0\,;\,+\infty\,) \cap [\,3\,;\,+\infty\,)$$

$$\mathbf{D} = [\,3\,;\,+\infty\,)$$

✍ A. 2.125 auf Seite 239

Entscheidend für die Definitionsmenge ist der Ausgangsterm. Schließt er von vornherein bestimmte Werte aus, so sind diese Werte für alle Folgeterme ausgeschlossen. Treten durch nachfolgende Umformungen weitere Einschränkungen auf, so sind diese durch entsprechende Maßnahmen kenntlich zu machen, etwa durch Betragsstriche oder durch Ausschluss einzelner Werte.

☞ Auch wenn der Definitionsbereich nicht ausdrücklich gefordert oder angegeben ist, sollte man sich immer Klarheit über die zulässigen Zahlenwerte verschaffen!

Beispiel:

2.154 Man vereinfache die Wurzelterme unter Berücksichtigung ihrer Definitionsbereiche.

a) $\left(\sqrt{x}\,\right)^2 = ?$
Die Wurzel ist hier nur für $x \geq 0$ definiert. Das Wurzelziehen und das Quadrieren heben sich gegenseitig auf: $\left(\sqrt{x}\,\right)^2 = x$ mit $x \geq 0$

b) $\sqrt{x^2} = ?$
Die Wurzel ist für alle $-\infty < x < +\infty$ definiert, da der Radikand x^2 niemals negativ werden kann. Wurzelziehen und Quadrieren heben sich hier in der Form auf, dass $\sqrt{x^2} = |x|$ ergibt.
Mit $-\infty < x < +\infty$ kann die Variable x sowohl einen positiven, wie auch einen negativen Wert annehmen. Das Wurzelziehen liefert – in Übereinstimmung mit unserer Definition – aber nur einen positiven Wert, nämlich $|x|$.

Greifen wir den Ereignissen schon ein wenig voraus und überlegen, welche Werte für x die folgende Gleichung erfüllen: $\sqrt{x^2} = 5$

$$\sqrt{x^2} = 5 \qquad \Rightarrow |x| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad (x=-5) \vee (x=+5)$$

Die Probe zeigt, dass beide Werte richtig sind: $\sqrt{(-5)^2} = 5$ ✓ $\sqrt{(+5)^2} = 5$ ✓

c) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^2} = ?$
Die erste Wurzel ist nur für $x \geq 0$, die zweite Wurzel für alle $-\infty < x < +\infty$ definiert. Der gesamte Ausdruck erfordert somit die Beschränkung auf $x \geq 0$. Die Betragsstriche entfallen auf Grund dieser Einschränkung:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^2} = \sqrt{x}\cdot x = x\cdot\sqrt{x}$$

d) $\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y^2}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{z} = ?$ Die Variablen sind für unterschiedliche Bereiche definiert: $x \geq 0,\ -\infty < y < +\infty, z \geq 0$

$$\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y^2}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{z} = x\cdot|y|\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{z}$$

Als Verallgemeinerung dieser Beispiele kann man für gerade Wurzelexponenten formulieren:

Ist $n \in \mathbf{N}^*$, so gilt

$$\sqrt[2n]{b}^{\,2n} = \sqrt[2n]{b^{2n}} = b \text{ für } b \geq 0$$
$$\sqrt[2n]{b^{2n}} = |\,b\,| \qquad \text{für } -\infty < b < \infty \tag{2.56}$$

Man darf also nicht ohne Weiteres gleiche Wurzel- oder Potenzexponenten gegeneinander „kürzen". Es muss stets darauf geachtet werden, in welchem Bereich die Basis b gültig ist.

Dies hat zur Folge, dass von gleichen Quadraten nicht auf gleiche Basen, sondern nur auf gleiche Beträge der Basen geschlossen werden kann:

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|.$$

Es gilt auch $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, aber nicht unbedingt umgekehrt!

Da der Pfeil nur in eine Richtung zeigt, merken wir uns:

▌ Quadrieren ist *keine* Äquivalenzoperation!

Wir werden diesen wichtigen Aspekt in Abschnitt 2.5.4.3 noch einmal vertiefen und an Beispielen erläutern.

✍ A. 2.126–2.127 auf Seite 239

2.5.1.3 Die Berechnung von Wurzelwerten

Algorithmen[1)], mit deren Hilfe die Berechnung von Wurzelwerten auf die vier Grundrechenarten $+, -, \times$ und $\div$ zurückgeführt werden, gibt es, solange man die Wurzelrechnung kennt. Allerdings werden sie heute kaum noch verwendet, da es mit Computern und Taschenrechnern Hilfsmittel gibt, die die gesuchten Zahlenwerte außerordentlich schnell und mit großer Genauigkeit ermitteln können. Wir demonstrieren hier ein Verfahren, das in ähnlicher Weise auch bei der Lösung vieler komplizierter mathematischer Probleme beschritten wird, die sich nicht ausschließlich auf die Grundrechenarten zurückführen lassen.

Beispiel:

2.155 $\sqrt[3]{10}$ soll ohne die Wurzel-Tasten eines Taschenrechners berechnet werden.

Es wird ein Einschachtelungsprinzip, die **Intervallschachtelung**, vorgestellt, mit deren Hilfe der Zahlenwert von $\sqrt[3]{10}$ von Schritt zu Schritt immer genauer angenähert wird. Das Intervall, also der Zahlenbereich, in dem das Ergebnis liegt, wird von links und rechts schrittweise eingeengt. Der Grundgedanke ist dabei folgender:

[1)] al (arab.) arab.Artikel, arithmos (griech.) Zahl. Hier: Oberbegriff für spezielle Rechenverfahren.

Da die dritte Wurzel aus 10 bestimmt werden soll, werden zunächst die beiden benachbarten natürlichen Zahlen gesucht, zwischen deren dritten Potenzen die 10 liegt. Das sind 2 und 3, denn

$$2^3 = 8 < 10 < 3^3 = 27$$

Hieraus lässt sich vermuten, dass $\sqrt[3]{10}$ näher an der 2 liegen wird als an der 3.

Also berechnet man mit der 2,1 beginnend in Zehntelschritten die folgenden Zahlen, bis man wiederum an die Stelle gelangt, an der die dritten Potenzen den Wert 10 überschreiten:

$$2{,}1^3 = 9{,}261 \qquad 2{,}2^3 = 10{,}648$$

Schon beim zweiten Schritt erkennt man, dass $2{,}1 < \sqrt[3]{10} < 2{,}2$ sein muss. Da der Radikand 10 fast in der Mitte zwischen 9,261 und 10,648 liegt, lässt sich vermuten, dass auch der gesuchte Wurzelwert etwa in der Mitte von 2,1 und 2,2 liegen wird.

Beim folgenden Schritt unserer Annäherung an den gesuchten Wert wird man daher von 2,14 ausgehend in Hundertstelschritten weitergehen, bis man wiederum die Grenze 10 überschreitet:

$$2{,}14^3 = 9{,}800\,344 \qquad 2{,}15^3 = 9{,}938\,375 \qquad 2{,}16^3 = 10{,}077\,696$$

Das Grundprinzip des Verfahrens ist also: Überschreitet der Potenzwert den Wert des Radikanden, so verkleinert man die Schrittweite für die Suche nach dem exakten Wert auf ein Zehntel der bisherigen Schrittweite und verfährt damit nach demselben Schema, das vorher angewendet worden ist:

$$\begin{array}{llll}
2 < \sqrt[3]{10} < 3 & \text{, da} & 2^3 = 8 < 10 < 27 & = 3^3 \\
2{,}1 < \sqrt[3]{10} < 2{,}2 & \text{, da} & 2{,}1^3 = 9{,}261 < 10 < 10{,}648 & = 2{,}2^3 \\
2{,}15 < \sqrt[3]{10} < 2{,}16 & \text{, da} & 2{,}15^3 \approx 9{,}9384 < 10 < 10{,}0777 & \approx 2{,}16^3 \\
2{,}154 < \sqrt[3]{10} < 2{,}155 & \text{, da} & 2{,}154^3 \approx 9{,}9939 < 10 < 10{,}0079 & \approx 2{,}155^3 \\
2{,}1544 < \sqrt[3]{10} < 2{,}1545 & \text{, da} & 2{,}1544^3 \approx 9{,}9995 < 10 < 10{,}0009 & \approx 2{,}1545^3
\end{array}$$

Soll $\sqrt[3]{10}$ auf 5 Stellen nach dem Komma ermittelt werden, so findet man auf diese Weise

$$\sqrt[3]{10} \approx 2{,}15\,443$$

Um sich mit dem Verfahren vertraut zu machen, sollte man es selbstständig und auch für andere Werte ausprobieren.

Das Beispiel macht deutlich, wie viel Mühe und Ausdauer nötig waren, um derartige Zahlenwerte zu berechnen, als noch keinerlei elektronische Rechenhilfsmittel zur Verfügung standen.

✍ A. 2.128 auf Seite 239

2.5.2 Die reellen Zahlen

Abschnitt 2.2.2: Zahlenmengen

Der Pythagoreer[1)] Hippasos von Metapont hat im fünften vorchristlichen Jahrhundert die Behauptung aufgestellt, dass es Strecken geben muss, deren Länge man nicht als

[1)] Anhänger der Lehre des griechischen Mathematikers und Philosophen Pythagoras.

Quotient zweier ganzer Zahlen ausdrücken kann. Solche Strecken bezeichnet man als **inkommensurable**[1] Strecken. Das führt auf Zahlen, die unendlich viele Nachkommastellen besitzen, die sich *nicht periodisch* wiederholen. Daher reichen die rationalen Zahlen a/b nicht mehr aus und man benötigt eine neue Klasse von Zahlen, die **irrationalen**[2] **Zahlen**.

Irrationale Zahlen lassen sich nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen. Sie können nur als unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen geschrieben werden.

Ein Beispiel für eine irrationale Zahl ist $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ oder allgemeiner die Wurzel aus einer Primzahl $\sqrt{\text{prim}}$. Später werden wir noch die EULER'sche Zahl $e = 2{,}7182\ldots$, siehe Abschnitt 2.6.2.2 und die Kreiszahl $\pi = 3{,}1415\ldots$, siehe Abschnitt 5.11.5 kennen lernen.

Woher will man wissen, dass $\sqrt{2}$ wirklich irrational ist? Die Ziffernfolge könnte sich ja ab der dreimillionsten Stelle doch noch periodisch wiederholen oder nach der viermilliardsten Stelle abbrechen.

Im zehnten Buch von EUKLIDS[3] Elementen findet man einen Beweis, der in zeitgemäßer Sprache hier erläutert werden soll. Man macht dabei eine Annahme, die man Schritt für Schritt zu einem Widerspruch führt. Daraus kann man schlussfolgern, dass die ursprüngliche Annahme falsch sein muss. Das ist das *Prinzip des Widerspruchbeweises*.

Wäre $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl, so müsste man sie als Quotient zweier ganzer Zahlen a und b darstellen können:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad (*)$$

Wir würden dabei a und b so wählen, dass der Bruch a/b nicht weiter zu kürzen ist. Somit müssen a und b *teilerfremd* und verschieden von 1 sein. Dann gilt

$$a = \sqrt{2} \cdot b \text{ , woraus durch Quadrieren}$$

$$a^2 = 2 \cdot b^2 \text{ folgt.} \qquad (**)$$

Das bedeutet aber, dass a^2 als Vielfaches von 2 eine *gerade Zahl* sein muss. Da aber das Quadrat einer geraden Zahl stets gerade, das Quadrat einer ungeraden Zahl aber stets ungerade ist, siehe Beispiel 2.93, folgt, dass der Zähler a des Bruches (*) eine *gerade Zahl* sein muss. Die Zahl a muss sich demnach in der Form

$$a = 2 \cdot k$$

schreiben lassen. Setzt man dies in (**) ein, so erhält man

$$(2\cdot k)^2 = 2\cdot b^2 \qquad \text{oder} \qquad 4k^2 = 2\cdot b^2 \qquad \text{oder} \qquad b^2 = 2k^2.$$

Aus der letzten Gleichung geht, analog zu den Schlussfolgerungen für Gleichung (**), hervor, dass b^2 und damit auch b *gerade Zahlen* sein müssen.

[1] commensurabilis (lat.) gleich zu bemessen; in ... als Verneinungsform
[2] ir... Form der lat. Verneinung. Irrationale Zahlen sind somit nicht rationale, d. h. „unvernünftige" Zahlen.
[3] griech. Mathematiker, 4. / 3. Jhdt. v. Chr.

Fassen wir zusammen:

- Der Zähler a ist eine gerade Zahl.
- Der Nenner b ist ebenfalls eine gerade Zahl.
- Zähler und Nenner enthalten somit beide den Faktor 2.
- Deshalb können wir den Bruch $\frac{a}{b}$ durch 2 kürzen.

Dies bedeutet aber, dass wir die ursprüngliche Voraussetzung, dass a und b teilerfremd sein sollen, nicht aufrecht erhalten können.

Dies wiederum besagt, dass die Voraussetzung *falsch* sein muss. Daraus folgt:

$\sqrt{2}$ kann **keine rationale Zahl** sein! $\square$

Das, was hier für $\sqrt{2}$ vorgeführt wurde, kann für alle Quadratwurzeln nachgewiesen werden, deren Radikand keine Quadratzahl ist.

Außer der Menge der rationalen Zahlen, die unendlich viele Elemente besitzt, gibt es demnach auch noch die Menge der irrationalen Zahlen mit unendlich vielen Elementen. Beim tieferen Eindringen in die Mathematik hat sich herausgestellt, dass es noch weitere Zahlenarten gibt, die sich nicht in diese beiden Kategorien einordnen lassen.

Die Vereinigung der Mengen der rationalen und der irrationalen Zahlen wird die **Menge der reellen Zahlen** genannt und mit dem Symbol **R** bezeichnet. Die reellen Zahlen füllen den Zahlenstrahl komplett aus.

Die rationalen und die irrationalen Zahlen unterscheiden sich in den folgenden Merkmalen:

Rationale Zahlen	sind	ganze oder gebrochene Zahlen, die in Dezimaldarstellung endliche Dezimalbrüche oder *periodische* unendliche Dezimalbrüche sind.
Irrationale Zahlen	sind	dadurch gekennzeichnet, dass sie in Dezimaldarstellung *nichtperiodische* unendliche Dezimalbrüche sind.

Mit den bereits eingeführten Bezeichnungen

N: Menge der natürlichen Zahlen,
Z: Menge der ganzen Zahlen,
Q: Menge der rationalen Zahlen und
R: Menge der reellen Zahlen

lässt sich folgende Relation zwischen diesen Mengen formulieren, siehe auch Bild 2.21:

$$\boxed{\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}} \tag{2.57}$$

Ein umfassenderer Zahlbereich als die reellen Zahlen wird in diesem Buch nicht behandelt.

Verlag Harri Deutsch – Kreul, Ziebarth: *Mathematik leicht gemacht* – ISBN: 978-3-8171-1836-6

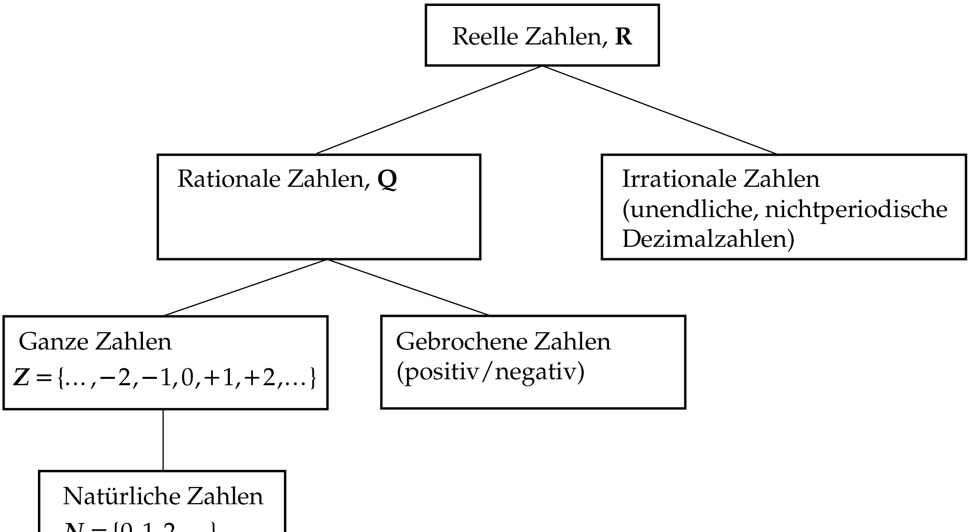

Bild 2.21 Zahlenmenge R

2.5.3 Zweite Erweiterung des Potenzbegriffs – Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Im Abschnitt 2.4.3 wurde der Potenzbegriff, der ursprünglich nur Sinn hatte, wenn der Exponent eine natürliche Zahl größer als eins war, dadurch erweitert, dass auch Potenzen mit negativen Exponenten sowie Potenzen mit den Exponenten null und eins definiert wurden. Es zeigte sich dann, dass die Potenzgesetze auch auf diesen erweiterten Potenzbegriff angewendet werden dürfen.

Es soll nun untersucht werden, ob es sinnvoll ist, auch mit **Potenzen mit gebrochenen Exponenten** zu rechnen. Solche Potenzen wären $3^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{3}{4}}$, $36^{0,5}$, $a^{\frac{m}{n}}$, $5^{-\frac{2}{7}}$ …

Wenn auch solche Potenzen einen Sinn haben sollen, dann müssen in erster Linie auch für sie die Potenzgesetze gelten. So müsste etwa

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 3^1 = 3 \quad \text{sein.}$$

Nun gilt aber

$$\sqrt{3}^{\,2} = 3, \quad \text{so dass es nahe liegt,}$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \text{zu setzen.}$$

In ähnlicher Weise führt der Vergleich von

$$\left(27^{\frac{3}{4}}\right)^4 = 27^{\frac{3}{4}\cdot 4} = 27^3 \quad \text{und} \quad \left(\sqrt[4]{27^3}\right)^4 = 27^3$$

auf die Beziehung

$$27^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{27^3}$$

Verallgemeinert man diese Beispiele, so kommt man zu einer *zweiten Erweiterung des Potenzbegriffs*:

> Alle **Wurzeln** lassen sich als *Potenzen mit gebrochenen Exponenten* schreiben.
> Dabei stimmt der Zähler des Exponenten mit dem Exponenten des Radikanden und der Nenner des Exponenten mit dem Wurzelexponenten überein.
> Umgekehrt lässt sich auch jede Potenz mit gebrochenem Exponenten als Wurzel schreiben:
>
> $$\boxed{b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{b}^{\,m}} \qquad b \geq 0 \tag{2.58}$$

Es lässt sich zeigen, dass alle Potenzgesetze auch für diesen erweiterten Potenzbegriff gültig sind. Die Definition von Potenzen mit gebrochenen Exponenten ist somit sinnvoll.

Beispiele:

2.156 Verwandlung von Potenzen mit gebrochenen Exponenten in Wurzelausdrücke:

a) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$ b) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

c) $243^{0{,}2} = 243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = 3$ d) $q^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{q^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{q}}$

e) $x^{-0.75} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ f) $u^{5{,}9} = u^5 \cdot u^{0{,}9} = u^5 \cdot \sqrt[10]{u^9}$

✍ A. 2.129–2.130 auf Seite 239

2.157 Verwandlung von Wurzeln in Potenzen mit gebrochenen Exponenten:

a) $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$ b) $\sqrt[5]{x}^{\,2} = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2 = x^{\frac{2}{5}}$ c) $\sqrt[3]{u^4} = u^{\frac{4}{3}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{z^m}} = z^{-\frac{m}{n}}$ e) $\sqrt{a^2 + b^2} = \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{1}{2}}$

✍ A. 2.131–2.133 auf Seite 239

Sämtliche Wurzelausdrücke können auch als Potenz mit gebrochenem Exponenten eingegeben werden:

Aufgabe	**Eingabe**
$\sqrt[5]{26^4} = ?$	5 $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ $\boxed{(}$ 26 $\boxed{x^n}$ 4 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$
$26^{\frac{4}{5}} = ?$	26 $\boxed{x^n}$ $\boxed{(}$ 4 $\boxed{a\,b/c}$ 5 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$
$26^{0{,}8} = ?$	26 $\boxed{x^n}$ 0,8 $\boxed{=}$

In allen drei Fällen wird als gerundetes Ergebnis 13,551 229 angezeigt.

Mit dem Taschenrechner ist es sehr einfach geworden, auch „exotische" Ausdrücke wie $\sqrt[\pi]{\sqrt{2}}^{\sqrt[3]{3}}$ zu berechnen. Wer diese Wurzel selbstständig berechnet, kommt zu dem Ergebnis

$$\sqrt[\pi]{\sqrt{2}}^{\sqrt[3]{3}} \approx 1{,}172\,462.$$

Dieses Beispiel legt nahe, dass der Wurzelbegriff und die damit verbundenen Gesetze auch auf reelle Wurzelexponenten $n \in \mathbf{R}$ erweitert werden kann. Wir sollten aber bedenken, dass für irrationale Zahlen numerisch stets nur mit Näherungen endlich vieler Stellen gerechnet werden kann – also mit rationalen Näherungswerten.

✍ A. 2.134 auf Seite 240

2.5.4 Wurzelgesetze

Für die Wurzelrechnung sind *keine neuen Rechengesetze erforderlich*, weil sich jede Wurzel als Potenz mit einem gebrochenen Exponenten schreiben lässt und damit die Potenzgesetze auch für Wurzeln gelten.

☞ Da sich jedoch viele Aufgaben der Wurzelrechnung mit dem Wurzelzeichen bequemer darstellen lassen als mithilfe der Potenzschreibweise, werden die einzelnen Rechengesetze im Folgenden auch in der Wurzelschreibweise angegeben. Man vergewissere sich jedoch, dass bei keinem der folgenden Gesetze etwas Neues gegenüber dem entsprechenden Potenzgesetz auftritt. Es reicht also aus, die Potenzgesetze zu kennen und sie auf die Wurzelrechnung zu übertragen.

2.5.4.1 Addition und Subtraktion von Wurzeln

Wie für Potenzen in Abschnitt 2.4.2.1 beschrieben, gilt auch für Wurzeln:

> Wurzeln lassen sich nur dann addieren und subtrahieren, wenn sie sowohl in ihren Radikanden als auch in ihren Wurzelexponenten übereinstimmen.

⚠ Allgemeine Terme wie $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ oder $\sqrt{a^2 \pm b^2 \ldots}$ lassen sich demnach nicht weiter vereinfachen, es sei denn, dass für die Variablen a und b bestimmte Zahlenwerte gegeben sind. So sind

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{a^2 \pm b^2} \neq a \pm b.$$

Beispiel:

2.158 a) $5 \cdot \sqrt[6]{d} + 8 \cdot \sqrt[6]{d} - 11 \cdot \sqrt[6]{d} = 2 \cdot \sqrt[6]{d}$

b) $4 \cdot \sqrt[4]{x} + 2 \cdot \sqrt[3]{x} - 3 \cdot \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}$

c) $T_1(x) : \sqrt{x \cdot x^3} = \sqrt{x^4} = x^2 \qquad x \in \mathbf{R}$

$T_2(x) : \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} = \sqrt{x^4} = x^2 \qquad x \in \mathbf{R}^{\geq 0}$

Die beiden Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ lassen sich mithilfe von Potenz- und Wurzelumformungen *scheinbar* auf das gleiche Ergebnis x^2 bringen. Während man aber in $T_1(x)$

für x alle reelle Zahlen einsetzen darf, sind bei $T_2(x)$ nur die nicht negativen Werte erlaubt.

$x = -4$ liefert im ersten Term das Ergebnis 16, aber beim zweiten Term ist dieser Wert für x überhaupt nicht zugelassen.

Dieses Beispiel soll noch einmal verdeutlichen, dass alle Potenz- und Wurzelumformungen nur im Rahmen des individuell zu bestimmenden Definitionsbereiches anzuwenden sind! Das ist eigentlich selbstverständlich, wird aber allzu oft übersehen.

d) $a \cdot \sqrt[6]{q} - b \cdot \sqrt[6]{q} + c \cdot \sqrt[6]{q} - \sqrt[6]{q} = (a - b + c - 1) \cdot \sqrt[6]{q}$

e) $\sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3} = \sqrt[3]{27 + 64 + 125} = \sqrt[3]{216} = 6$

f) $\sqrt{81} - \sqrt[4]{81} = 9 - 3 = 6$

✍ A. 2.135 auf Seite 240

2.5.4.2 Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten

Nach den Potenzgesetzen gilt für $a,b \geq 0$

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$$

Ersetzt man die gebrochenen Exponenten durch Wurzelzeichen, so erkennt man:

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten lassen sich multiplizieren, indem man das Produkt der Radikanden berechnet und dieses mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}} \qquad a,b \geq 0 \tag{2.59}$$

Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes:

Die Wurzel aus einem Produkt kann dadurch gebildet werden, dass man die Faktoren einzeln radiziert und danach das Produkt der Wurzeln ermittelt:

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}} \qquad a,b \geq 0 \tag{2.60}$$

Beispiel:

2.159 a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6 \cdot 8 \cdot 3} = \sqrt{144} = 12$

b) $\sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3} + 9} \cdot \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3} - 9} = \sqrt[3]{\left(6 \cdot \sqrt{3} + 9\right)\left(6 \cdot \sqrt{3} - 9\right)}$

$= \sqrt[3]{\left(6 \cdot \sqrt{3}\right)^2 - 9^2} = \sqrt[3]{36 \cdot 3 - 81} = \sqrt[3]{27} = 3$

c) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a - 2 \cdot \sqrt{ab} + b$

d) $\left(\sqrt{u} + \sqrt{v}\right) \cdot \left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right) = u - v$

e) Das geometrische Mittel der n Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots\ a_n$ ist der Ausdruck

$$m = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ \ldots \ \cdot a_n}$$

Somit ist das geometrische Mittel der Zahlen 6 und 24 die Zahl

$$m_1 = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{144} = 12$$

und das geometrische Mittel von 12, 45 und 50 ist

$$m_2 = \sqrt[3]{12 \cdot 45 \cdot 50} = \sqrt[3]{\left(2^2 \cdot 3\right) \cdot \left(3^2 \cdot 5\right) \cdot \left(5^2 \cdot 2\right)} = \sqrt[3]{(2 \cdot 3 \cdot 5)^3} = 30$$

✍ A. 2.136 auf Seite 240

2.5.4.3 Teilradizieren

Das Wurzelgesetz für die Multiplikation erlaubt häufig ein **teilweises Wurzelziehen**. Man versucht dazu, den Radikanden in zwei Gruppen von Faktoren zu zerlegen: solche, aus denen die Wurzel glatt gezogen werden kann und solche, bei denen dies nicht möglich ist.

Beispiel:

2.160 a) $\sqrt{72a^2b} = \sqrt{36a^2 \cdot 2b} = \sqrt{6^2a^2} \cdot \sqrt{2b} = 6|a| \cdot \sqrt{2b}$

b) $\sqrt{131\,220} = ?$

Bei größeren Zahlen ist eine Primfaktorzerlegung des Radikanden hilfreich, siehe Abschnitt 1.2.2.3:

$131\,220 = 2^2 \cdot 3^8 \cdot 5^1 = 2^2 \cdot \left(3^4\right)^2 \cdot 5^1 = \left(2 \cdot 3^4\right)^2 \cdot 5^1$

$\sqrt{131\,220} = \sqrt{\left(2 \cdot 3^4\right)^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 3^4 \cdot \sqrt{5} = 162 \cdot \sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{9\,720\,000} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^4} = \sqrt[3]{\left(2^2\right)^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3} \cdot \sqrt[3]{3^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{45} = 60 \cdot \sqrt[3]{45}$

d) $3 \cdot \sqrt{125} - 2 \cdot \sqrt{20} - 3 \cdot \sqrt{180} + 6 \cdot \sqrt{45} = \mathbf{?}$

Hier ist in jedem Radikanden eine Quadratzahl als Faktor enthalten. Daher lassen sich die Wurzeln wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot \sqrt{25 \cdot 5} - 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 5} - 3 \cdot \sqrt{36 \cdot 5} + 6 \cdot \sqrt{9 \cdot 5} \\ &= 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} - 3 \cdot 6 \cdot \sqrt{5} + 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 11 \cdot \sqrt{5} \end{aligned}$$

e) $\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b^2}\right) = \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^2b^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{b^3}$

$$= a + \sqrt[3]{(ab)^2} - \sqrt[3]{ab} - b$$

f) $\sqrt[n]{a^{n-2}} \cdot \sqrt[n]{a^{n+3}} = \sqrt[n]{a^{n-2} \cdot a^{n+3}} = \sqrt[n]{a^{2n+1}} = \sqrt[n]{a^{2n} \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt[n]{a}$

g) $\alpha)$ $\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{b} = |a| \cdot b \cdot \sqrt{b}$

Die Betragsstriche bei b entfallen, da der Ausdruck $\sqrt{b}$ eine Beschränkung im Definitionsbereich von b zur Folge hat: $\mathbf{D}_b = \mathbf{R}^{\geq 0}$

$\beta)$ $\sqrt{a^4b^3} = \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{b} = a^2 \cdot b \cdot \sqrt{b}$

Die Beträge entfallen komplett, da zusätzlich zu den in α) genannten Kriterien a^2 nie negativ werden kann und sich somit eine Fallunterscheidung erübrigt.

Verlag Harri Deutsch – Kreul, Ziebarth: *Mathematik leicht gemacht* – ISBN: 978-3-8171-1836-6

h) Wann sind Betragsstriche erforderlich und wann nicht?

α) $\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$	β) $\sqrt[42]{x^{42}} = \lvert x\rvert$	γ) $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{\lvert x\rvert}$
δ) $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{\lvert x\rvert}$	ϵ) $\sqrt{x^4} = x^2$	ζ) $\sqrt[6]{x^{18}} = \lvert x\rvert^3$
η) $\sqrt[4]{x^{10}} = \sqrt{\lvert x\rvert^5}$	ϑ) $\sqrt[6]{x^{10}} = \sqrt[3]{\lvert x\rvert^5}$	ι) $\sqrt[3]{x^4} = \lvert x\rvert \cdot \sqrt[3]{\lvert x\rvert}$
κ) $\sqrt[9]{x^3} = \sqrt[3]{x}$	λ) $\sqrt{x^3} = x \cdot \sqrt{x}$	μ) $\sqrt{x^5} = x^2 \cdot \sqrt{x}$
ν) $\sqrt[4]{x^5} = x \cdot \sqrt[4]{x}$	ξ) $\sqrt[3]{x^5} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$	o) $\sqrt[3]{x^7} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

Für κ bis o gilt $x \in \mathbf{R}^{\geq 0}$, ansonsten $x \in \mathbf{R}$.

Modelle, die über einen speziellen mathematischen Ausgabe-Modus verfügen, liefern für quadratische Wurzeln auch teilradizierte Ergebnisse:

Aufgabe	**Eingabe**	**Ausgabe**
$\sqrt{8} = ?$	$\boxed{\sqrt{\square}}$ 8 $\boxed{=}$	$2\sqrt{2}$
$\sqrt{5\,769} = ?$	$\boxed{\sqrt{\square}}$ 5 769 $\boxed{=}$	$3\sqrt{641}$

✍ A. 2.137–2.140 auf Seite 240

Möchte man das Teilradizieren wieder umkehren, also einen Faktor, der vor dem Wurzelzeichen steht, unter die Wurzel holen, so muss dieser Faktor in die Potenz des Wurzelexponenten gesetzt werden. Für nicht negative Faktoren gilt:

$$a \geq 0: \qquad a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Beispiel:

2.161 a) $3 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = \sqrt{63}$

b) $4 \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 18} = \sqrt[3]{1\,152}$

c) Der Faktor $x > 0$ soll mit unter das Wurzelzeichen gebracht werden: $x \cdot \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x^2}}$

$$x \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2 - y^2}$$

Bei negativen Vorfaktoren ist zu berücksichtigen, dass man nur den Betrag des Vorfaktors unter die Wurzel holen kann, denn der Radikand darf auch bei ungeraden Wurzelexponenten nicht negativ werden. Vor die Wurzel muss ein Minuszeichen gesetzt werden:

$$a < 0,\ n \text{ ungerade:} \quad a \cdot \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{\lvert a\rvert^n} \cdot \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{\lvert a\rvert^n \cdot b} = -\sqrt[n]{-a^n \cdot b}$$

Beispiel:

2.162 a) $-5 \cdot \sqrt{11} = -\sqrt{5^2 \cdot 11} = -\sqrt{275}$

b) $-2 \cdot \sqrt[3]{10} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 10} = -\sqrt[3]{80}$

c) Schreibe für beliebiges k unter eine Wurzel: $3k \cdot \sqrt{5x^2}$

$k > 0: \quad 3k \cdot \sqrt{5x^2} = \sqrt{(3k)^2} \cdot \sqrt{5x^2} = \sqrt{45\,k^2x^2}$

$k < 0: \quad 3k \cdot \sqrt{5x^2} = -\sqrt{(3k)^2} \cdot \sqrt{5x^2} = -\sqrt{45\,k^2x^2}$

$k = 0: \quad 0$ (Trivialer[1] Fall, wird hier nicht weiter betrachtet.)

d) Schreibe für beliebiges f unter eine Wurzel: $2f \cdot \sqrt[5]{7a^3b}$

$f > 0: \quad 2f \cdot \sqrt[5]{7a^3b} = \sqrt[5]{(2f)^5} \cdot \sqrt[5]{7a^3b} = \sqrt[5]{224\,a^3b\,f^5}$

$f < 0: \quad 2f \cdot \sqrt[5]{7a^3b} = -\sqrt[5]{\left(2\,|f|\right)^5} \cdot \sqrt[5]{7a^3b} = -\sqrt[5]{224\,a^3b\,|f|^5} = -\sqrt[5]{-224\,a^3b\,f^5}$

e) Wenn der Radikand schon einen nicht negativen Wert für die Variable einfordert, entfällt die Fallunterscheidung:

$2y\sqrt[3]{4y} = \sqrt[3]{(2y)^3} \cdot \sqrt[3]{4y} = \sqrt[3]{32\,y^4} \qquad y \geq 0$

☞ Tipp: Man nutze diese Umkehrmöglichkeit zur Kontrolle der Ergebnisse, die man beim Teilradizieren erhalten hat!

✍ A. 2.141 auf Seite 241

2.5.4.4 Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten

In ähnlicher Weise wie bei der Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten lässt sich herleiten, dass gilt:

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten können dividiert werden, indem man den Quotienten der Radikanden mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert:

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}} \qquad a \geq 0, b > 0 \qquad (2.61)$$

Entsprechend gilt für die Umkehrung

Einen Bruch kann man radizieren, indem man Zähler und Nenner für sich radiziert und die entstehenden Wurzelwerte durcheinander dividiert:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}} \qquad a \geq 0, b > 0 \qquad (2.62)$$

Beispiele:

2.163 a) $\sqrt{72} : \sqrt{8} = \sqrt{72 : 8} = \sqrt{9} = 3$

b) $\sqrt{x} : \sqrt{y} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

x darf alle nicht negativen Werte annehmen, für y muss aber die Null ausgeschlossen werden, da y im Nenner steht, also $(x \geq 0) \wedge (y > 0)$.

[1] trivialis (lat.) gewöhnlich, eine Lieblingsvokabel der Mathematiker, speziell für Erkenntnisse, die sich direkt aus einer Definition ergeben und deshalb nicht weiter erörtert werden müssen. Die Verwendung als Adjektiv erfolgt meist im Sinne von „sehr einfach“.

Verlag Harri Deutsch – Kreul, Ziebarth: *Mathematik leicht gemacht* – ISBN: 978-3-8171-1836-6

c) $\sqrt[3]{81a^5b^7} : \sqrt[3]{3ab} = \sqrt[3]{\left(81a^5b^7\right) : (3ab)} = \sqrt[3]{27a^4b^6} = 3ab^2 \cdot \sqrt[3]{a} \qquad a,b \in \mathbf{R}^{>0}$

d) $\sqrt{0{,}84} = \sqrt{\dfrac{84}{100}} = \dfrac{\sqrt{84}}{\sqrt{100}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{21}}{10} = \dfrac{1}{5}\sqrt{21}$

e) $\sqrt[3]{0{,}21} = \sqrt[3]{\dfrac{210}{1\,000}} = \dfrac{1}{10}\sqrt[3]{210}$

f)
$$
\begin{array}{l}
(u \cdot \sqrt{u} \quad + v \cdot \sqrt{v}) : (\sqrt{u} + \sqrt{v}) \qquad = u - \sqrt{uv} + v \\
\underline{-(u \cdot \sqrt{u} \quad + u \cdot \sqrt{v})} \\
\qquad\qquad - u \cdot \sqrt{v} + v \cdot \sqrt{v} \\
\qquad\quad \underline{-(- u \cdot \sqrt{v} - v \cdot \sqrt{u} \;)} \\
\qquad\qquad\qquad + v \cdot \sqrt{u} + v \cdot \sqrt{v} \\
\qquad\qquad \underline{-(\quad + v \cdot \sqrt{u} + v \cdot \sqrt{v} \;)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Hier noch einmal ausführlich ein Schritt der Zwischenrechnung:

$$\frac{-u\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = \frac{-\sqrt{u^2v}}{\sqrt{u}} = -\sqrt{\frac{u^2v}{u}} = -\sqrt{uv}$$

Die Schreibweise einer Zahl mithilfe des Wurzelzeichens charakterisiert stets den *exakten Wert* dieser Zahl. So liefert

$$\sqrt{180}^{\,2} = 180$$

Für das praktische Rechnen verwendet man normalerweise *Näherungswerte* mit so vielen Stellen hinter dem Komma, die der geforderten Genauigkeit der Berechnung entsprechen. So kann man etwa für $\sqrt{180}$ den Wert

$$\sqrt{180} \approx 13{,}416\,4$$

verwenden, muss sich dabei jedoch darüber im Klaren sein, dass das Quadrat von 13,416 4 nicht 180 ist, sondern $13{,}416\,4^2 = 179{,}999\,788\,96$. Bei den meisten Aufgaben reichen im Allgemeinen vier oder fünf Stellen nach dem Komma aus.

Ähnlich, wie man die rationale Zahl $2/3$ nicht durch den Näherungswert 0,666 67 ersetzen sollte, ist auch bei den irrationalen Zahlen zu verfahren. Man sollte möglichst lange mit den Symbolen $2/3$ oder $6\sqrt{5}$ für $\sqrt{180}$ arbeiten und erst zum Schluss eine gerundete Näherungslösung angeben.

✍ A. 2.142–2.143 auf Seite 241

2.5.4.5 Rationalmachen des Nenners

Benötigt man einen Näherungswert für den Bruch $1/\sqrt{2}$, dann muss man – wenn man nicht weiter über die Aufgabe nachdenkt – den Zähler durch die Irrationalzahl $\sqrt{2} = 1{,}41\,421\ldots$ teilen. Je genauer das Ergebnis sein soll, umso mehr Stellen nach dem Komma müssen dann für $\sqrt{2}$ verwendet werden.

Einfacher ist es jedoch, durch eine natürliche Zahl zu teilen. Man erweitert deshalb den Nenner so, dass man dort eine natürliche Zahl erhält:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1{,}41\,421}{2} \approx 0{,}70\,711$$

Da im Nenner nun eine rationale Zahl erscheint, wird diese Vorgehensweise **Rationalmachen des Nenners** genannt.

☞ Steht dabei im Nenner eine n-te Wurzel, so muss man versuchen so zu erweitern, dass im Nenner die n-te Potenz einer Zahl entsteht, denn im Allgemeinen lässt sich mit einer irrationalen Zahl im Zähler vorteilhafter umgehen als mit einer irrationalen Zahl im Nenner.

Beispiel:

2.164 a) $$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$$

b) $$\sqrt{\frac{64}{135}} = \frac{\sqrt{8^2}}{\sqrt{3^2 \cdot 15}} = \frac{8}{3 \cdot \sqrt{15}} = \frac{8 \cdot \sqrt{15}}{3 \cdot \left(\sqrt{15}\right)^2} = \frac{8}{45}\sqrt{15}$$

c) $$\frac{2}{\sqrt[3]{9}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{3}$$

d) $$\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{a \cdot \sqrt{a}}{a} = \sqrt{a} \qquad a > 0$$

e) $$\frac{x}{\sqrt[7]{x^3}} = \frac{x \cdot \sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[7]{x^3} \cdot \sqrt[7]{x^4}} = \frac{x \cdot \sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[7]{x^7}} = \frac{x \cdot \sqrt[7]{x^4}}{x} = \sqrt[7]{x^4} \qquad x > 0$$

f) $\sqrt[3]{\frac{a}{x^2}} = ?$ Da sich für den Definitionsbereich von x aus der Wurzel nur die Einschränkung $x \neq 0$ ergibt, ist beim Erweitern folgende Fallunterscheidung notwendig:

$$x < 0: \quad \sqrt[3]{\frac{a}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{a \cdot |x|}{x^2 \cdot |x|}} = \frac{\sqrt[3]{a \cdot |x|}}{\sqrt[3]{|x|^3}} = \frac{\sqrt[3]{a \cdot |x|}}{|x|} = -\frac{\sqrt[3]{a \cdot |x|}}{x}$$

$$x > 0: \quad \sqrt[3]{\frac{a}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{a \cdot x}{x^2 \cdot x}} = \frac{\sqrt[3]{a \cdot x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{a \cdot x}}{x}$$

g) $\sqrt[3]{\frac{b^2}{x}} = ?$ Bei diesem Beispiel entfällt die Fallunterscheidung, da von vornherein $x > 0$ durch die Wurzel festgelegt wird.

$$\sqrt[3]{\frac{b^2}{x}} = \sqrt[3]{\frac{b^2 \cdot x^2}{x \cdot x^2}} = \frac{\sqrt[3]{b^2x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{b^2x^2}}{x}$$

Steht im Nenner eines Bruches eine Summe, in der Quadratwurzeln auftreten, dann kann man im Nenner die dritte binomische Formel

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

anwenden, um ihn rational zu machen: Erweitern mit dem *dazu passenden* Wurzelausdruck.

Beispiel:

2.165 a) $$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=3+\sqrt{15}$$

Im Nenner steht der irrationale Ausdruck $\sqrt{5}-\sqrt{3}$, weshalb wir den Bruch mit $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ erweitern, so dass im Nenner die dritte binomische Formel angewendet werden kann: $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2=5-3=2$

b) $$\frac{15}{2+\sqrt{6}}=\frac{15\cdot\left(2-\sqrt{6}\right)}{\left(2+\sqrt{6}\right)\left(2-\sqrt{6}\right)}=\frac{15\cdot\left(2-\sqrt{6}\right)}{4-6}=\frac{15}{2}\cdot\left(\sqrt{6}-2\right)$$

c) $$\frac{a}{a+\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\left(a-\sqrt{b}\right)}{\left(a+\sqrt{b}\right)\cdot\left(a-\sqrt{b}\right)}=\frac{a\cdot\left(a-\sqrt{b}\right)}{a^2-b}$$

d) $$\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot\sqrt{15}+3}{20-3}=\frac{3+2\cdot\sqrt{15}}{17}$$

e) $$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{10}}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{10}\right)}{\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)-\sqrt{10}\right]\cdot\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+\sqrt{10}\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{36}+\sqrt{60}-\sqrt{4}-\sqrt{12}-\sqrt{20}}{\left(2+2\cdot\sqrt{12}+6\right)-10}=\frac{6+2\cdot\sqrt{15}-2-2\cdot\sqrt{5}}{4\cdot\sqrt{3}-2}$$

$$=\frac{2\cdot\left(2+\sqrt{15}-\sqrt{5}\right)}{2\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\left(2+\sqrt{15}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}+1\right)}{\left(2\cdot\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}+1\right)}$$

$$=\frac{4\cdot\sqrt{3}+2+2\cdot\sqrt{45}+\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{15}-\sqrt{5}}{4\cdot 3-1}$$

$$=\frac{4\cdot\sqrt{3}+2+6\cdot\sqrt{5}+\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{15}-\sqrt{5}}{11}=\frac{2+4\cdot\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{5}-\sqrt{15}}{11}$$

☞ Tipp: Die Rechnung wird einfacher, wenn man direkt zu Beginn im Zähler und im Nenner $\sqrt{2}$ ausklammert und wegkürzt.

f) In manchen Fällen kann man das dritte Binom auch in die andere Richtung anwenden, so dass man nicht mit einem Wurzelterm erweitert, sondern durch ihn kürzt:

$$\frac{a-1}{2\left(\sqrt{a}+1\right)}=\frac{\cancel{\left(\sqrt{a}+1\right)}\cdot\left(\sqrt{a}-1\right)}{2\cancel{\left(\sqrt{a}+1\right)}}=\frac{\sqrt{a}-1}{2}$$

✍ A. 2.144–2.148 auf Seite 242

2.5.4.6 Radizieren von Potenzen und Wurzeln

Beim Potenzieren einer Potenz dürfen die beiden Exponenten miteinander multipliziert werden. Dies trifft auch für gebrochene Exponenten zu, so dass für $a \geq 0$ gilt

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Schreibt man diese Formel mithilfe des Wurzelzeichens, so ergibt sich

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m}} \qquad a \geq 0 \tag{2.63}$$

Es ist gleichgültig, ob man eine nicht negative Zahl zuerst potenziert und dann radiziert oder ob man in der umgekehrten Reihenfolge vorgeht.

Ob man erst potenzieren und dann radizieren oder es umgekehrt machen soll, hängt ganz von der Aufgabenstellung ab.

Beispiel:

2.166 a) $\sqrt[5]{243^3} = \sqrt[5]{243}^{\,3} = 3^3 = 27$

b) $\sqrt{9x^2 - 12xy + 4y^2}^{\,5} = \sqrt{(3x - 2y)^2}^{\,5} = |3x - 2y|^5$

Anmerkung: Der Radikand $(3x - 2y)^2$ der zweiten Wurzel ist als Quadrat auf alle Fälle positiv, so dass die Wurzel ohne Bedenken gezogen werden darf. Da jedoch der Ausdruck $3x - 2y$ sowohl positiv als auch negativ sein kann, ist der Wurzelwert der Quadratwurzel in Absolutstriche zu setzen, siehe Abschnitt 2.5.1.2.

c) $\sqrt[3]{5}^{\,2} = ?$

$\sqrt[3]{5}^{\,2}$ ist das Quadrat einer vielstelligen Dezimalzahl und lässt sich damit nur sehr unbequem ermitteln. Vertauscht man hier die Reihenfolge von Radizieren und Potenzieren miteinander, so wird die Berechnung wesentlich einfacher.

$$\sqrt[3]{5}^{\,2} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} \approx 2{,}9240.$$

✍ A. 2.149 auf Seite 243

Für $a \geq 0$ folgt schließlich aus der Potenzgleichung

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k \cdot m}{k \cdot n}}$$

die Beziehung

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k \cdot n]{a^{k \cdot m}}} \qquad a \geq 0 \tag{2.64}$$

Wurzel- und Potenzexponent dürfen mit der gleichen Zahl multipliziert und durch die gleiche Zahl dividiert werden.

Man nennt diesen Vorgang in Analogie zur Bruchrechnung *Erweitern und Kürzen von Wurzel- und Radikandenexponenten*.

Beispiel:

2.167 a) $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$

b) $\sqrt[9]{\dfrac{8a^6b^{12}}{27c^3d^{15}}} = \sqrt[9]{\left(\dfrac{2a^2b^4}{3cd^5}\right)^3} = \sqrt[3]{\dfrac{2a^2b^4}{3cd^5}} = \dfrac{|b|}{d} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2a^2|b|}{3cd^2}} \qquad \begin{array}{c} a,b \in \mathbf{R} \\ c,d \in \mathbf{R}^{>0} \end{array}$

c) $\sqrt[4]{u^3}$ soll als 12. Wurzel geschrieben werden.

$$\sqrt[4]{u^3} = \sqrt[4\cdot 3]{u^{3\cdot 3}} = \sqrt[12]{u^9}$$

✍ A. 2.150–2.153 auf Seite 243

Nach den Potenzgesetzen muss

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m\cdot n}}$$

sein. Schreibt man dies mithilfe von Wurzeln, so ergibt sich eine *Doppelwurzel*:

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}} \qquad a \geq 0 \tag{2.65}$$

Beim Radizieren einer Wurzel darf die Reihenfolge, in der radiziert werden soll, vertauscht werden.

Jede mehrfache Wurzel kann auch stets als eine einfache Wurzel geschrieben werden mit einem Wurzelexponenten, der gleich dem Produkt der gegebenen Wurzelexponenten ist.

Umgekehrt lässt sich jede Wurzel mit einem Wurzelexponenten der keine Primzahl ist in mehrere ineinander geschachtelte Wurzeln umformen.

Beispiel:

2.168 a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}$

b) $\sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{\sqrt{9}} = \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[7]{u^3}} = \sqrt[28]{u^3}$

d) $\sqrt[3]{3\sqrt{3\sqrt[3]{3}}} = \sqrt[3]{3\sqrt{\sqrt[3]{3^3\cdot 3}}} = \sqrt[3]{3\cdot\sqrt[6]{3^4}} = \sqrt[3]{3\cdot\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^3\cdot 3^2}} = \sqrt[9]{3^5}$

✍ A. 2.154 auf Seite 244

2.5.4.7 Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten

Wenn in einem Term unterschiedliche Wurzelexponenten auftreten, ist es meistens vorteilhaft, die Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten zu schreiben und dann die Potenzgesetze anzuwenden.

Beispiel:

2.169 a) $\sqrt[n]{a^x} \cdot \sqrt[m]{a^y} = a^{\frac{x}{n}} \cdot a^{\frac{y}{m}} = a^{\frac{x}{n}+\frac{y}{m}} = a^{\frac{mx+ny}{mn}} = \sqrt[m\cdot n]{a^{mx+ny}}$

b) $$\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3}}} = \left\{3\cdot\left[3\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{3\cdot\left[3^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{3\cdot 3^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left\{3^{\frac{5}{3}}\right\}^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{9}}$$

Vergleiche diese Rechnung mit der in Beispiel 2.168 d.

c) $$\left(4\cdot\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xy^2}+3\sqrt[4]{xy^3}\right)\cdot\left(\sqrt[12]{xy^4}-2\cdot\sqrt{xy}\right)$$
$$=\left(4\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}+3\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot y^{\frac{3}{4}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{12}}\cdot y^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$=4\cdot x^{\frac{7}{12}}\cdot y^{\frac{5}{6}}-8xy+x^{\frac{5}{12}}\cdot y-2\cdot x^{\frac{5}{6}}\cdot y^{\frac{7}{6}}+3\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{13}{12}}-6\cdot x^{\frac{3}{4}}\cdot y^{\frac{5}{4}}$$
$$=4\sqrt[12]{x^7y^{10}}-8xy+y\cdot\sqrt[12]{x^5}-2y\cdot\sqrt[6]{x^5y}+3y\cdot\sqrt[12]{x^4y}-6y\cdot\sqrt[4]{x^3y}$$

d) Schreibe unter eine Wurzel: $\dfrac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2}$

$$\frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} \overset{①}{=} \frac{V}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} \overset{②}{=} \frac{V}{\pi}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}\right)^2 \overset{③}{=} \sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)^3\cdot\left(\frac{2\pi}{V}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Strategie:
① Struktur verbessern ⇒ Produkt zweier Brüche
② $1/\ldots$ bedeutet Kehrwert bilden ⇒ Radikanden umkehren
③ Vorfaktor und äußere Potenz unter die Wurzel holen

✍ A. 2.155–2.158 auf Seite 244

2.5.4.8 Rückblick auf die Potenz- und die Wurzelgesetze

Da sich jede Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten darstellen lässt, können die Potenzgesetze ohne Schwierigkeiten auf das Wurzelrechnen übertragen werden. Um mit Wurzeln rechnen zu können, würde es demnach ausreichen, nur die Potenzgesetze zu beherrschen.

Man verwendet jedoch beim Wurzelrechnen sowohl die Schreibweise mit Wurzelzeichen als auch die Darstellung durch Potenzen mit gebrochenen Exponenten. Dabei hängt es von der Aufgabenstellung, den gegebenen Zahlenwerten sowie den persönlichen Rechengewohnheiten ab, welcher der beiden Darstellungsformen der Vorrang gegeben wird.

Wer Aufgaben der Wurzelrechnung schnell und sicher lösen will, der muss mit der einen Darstellungsweise genau so sicher umgehen können wie mit der anderen. Es wird daher empfohlen, mehrere Aufgaben mit beiden Darstellungsarten zu lösen und die auf den unterschiedlichen Wegen gefundenen Resultate auf Übereinstimmung zu prüfen.

Aufgaben:

Anmerkung: Die Aufgaben, die reine Zahlenrechnungen sind, sollen zunächst ohne Hilfe von Rechengeräten gelöst werden. Danach erst sollte man den Taschenrechner zur Hand nehmen, um die schriftlich ermittelten Ergebnisse mit dem Rechner zu bestätigen. Das ist zwar zeitaufwendig, fördert aber das Gefühl für die zu erwartenden Ergebnisse ungemein.

2.5.1.1 Der Wurzelbegriff (Lösungen ab Seite 770)

2.121 Prüfe ohne die Wurzel-Tasten des Taschenrechners zu benutzen, ob die Wurzelwerte richtig sind:

a) $\sqrt{50\,176} = +224$ b) $\sqrt{0{,}121} = +0{,}11$ c) $\sqrt[3]{0{,}001} = +0{,}1$

d) $\sqrt[4]{20\,736} = +12$ e) $\sqrt[6]{-4\,096} = +4$ f) $\sqrt[8]{6\,562} = +3$

g) $\sqrt{(a+b)^4} = +(a+b)^2$ h) $\sqrt{66{,}2596} = +8{,}14$ i) $\sqrt[3]{132\,651} = \pm 51$

k) $\sqrt[3]{-0{,}008} = -0{,}2$

2.122 Desgleichen:

a) $\sqrt[5]{-161\,051} = -11$ b) $\sqrt[7]{-78\,125} = 5$ c) $\sqrt[x]{a^{3x}} = a^3$

d) $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$ e) $\sqrt{220\,900} = 470$ f) $\sqrt[3]{65} = -0{,}402\,07$

g) $\sqrt{9+16} = 3+4 = 7$ h) $\sqrt[4]{0{,}0016x^{12}} = 0{,}2x^3$

i) $\sqrt{100-36} = 10-6 = 4$ k) $\sqrt[3]{x^3+y^3} = x+y$

2.123 Berechne mit dem Taschenrechner und runde das Ergebnis auf 4 Nachkommastellen:

a) $\sqrt{580}$ b) $\sqrt{8{,}74}$ c) $\sqrt{0{,}0421}$ d) $\sqrt{0{,}270}$ e) $\sqrt{6\,700}$

f) $\sqrt[3]{10\,368}$ g) $\sqrt[3]{0{,}00648}$ h) $\sqrt[3]{0{,}00972}$ i) $\sqrt[3]{0{,}766}$ k) $\sqrt[3]{30{,}25}$

l) $\sqrt[4]{336}$ m) $\sqrt[4]{1{,}625}$ n) $\sqrt[5]{196{,}875}$ o) $\sqrt[5]{\dfrac{125}{24}}$ p) $\sqrt[4]{6\dfrac{49}{96}}$

2.124 Desgleichen:

a) $\sqrt[4]{42{,}6 \cdot 97{,}3 \cdot 62{,}1 \cdot 50{,}08}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{17{,}42 \cdot 9{,}235 \cdot 482{,}3}{0{,}003\,16 \cdot 0{,}000\,100\,4}}$

c) $\sqrt[8]{\left(\dfrac{1\,926 \cdot 63{,}24 \cdot 0{,}8204}{615 \cdot 8{,}925 \cdot 0{,}001\,24}\right)^5}$ d) $\sqrt[10]{\left(\dfrac{0{,}608 \cdot 0{,}3007 \cdot 0{,}012\,64 \cdot 0{,}0073}{14{,}86 \cdot 9{,}072 \cdot 0{,}8001 \cdot 0{,}006\,009}\right)^3}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{62{,}05^2 \cdot \sqrt[3]{0{,}0314} \cdot 120{,}04^3}{147{,}2^3 \cdot 40{,}57^4 \cdot \sqrt{25{,}64}}}$ f) $\left(\dfrac{\sqrt{1{,}076} \cdot \sqrt[3]{0{,}034}}{\sqrt[4]{0{,}6807} \cdot \sqrt[5]{0{,}000\,82}}\right)^3$

g) $\dfrac{\sqrt[3]{102{,}4} - \sqrt{10{,}24}}{1{,}024^4}$ h) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{0{,}074^2 \cdot 6{,}285^3}{0{,}602^3 \cdot \sqrt{596{,}2}} + \dfrac{1{,}001^5 \cdot 0{,}0072^2}{0{,}095^4 \cdot \sqrt[3]{3{,}001}}\right)^2}$

i) $\sqrt{\dfrac{62{,}36 \cdot 0{,}725}{1\,986 \cdot 432{,}3}}$ k) $\sqrt[3]{\dfrac{4{,}36^2 \cdot 72{,}53^3}{\sqrt[3]{75{,}6} \cdot 604^2}} + \sqrt{\dfrac{0{,}076^3 \cdot \sqrt[4]{0{,}001\,29}}{0{,}0024^2 \cdot \sqrt[3]{0{,}0426}}}$

l) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{26{,}48^3 \cdot \sqrt{7{,}824} \cdot 0{,}1845^4}{8{,}47^4 \cdot \sqrt[3]{1\,574} \cdot 0{,}0756^2}\right)^3 + \left(\dfrac{176{,}4^2 \cdot \sqrt[3]{67{,}23} \cdot 24{,}75^4}{25{,}76^3 \cdot \sqrt{30{,}27} \cdot 603{,}2^2}\right)^2}$

Verlag Harri Deutsch – Kreul, Ziebarth: *Mathematik leicht gemacht* – ISBN: 978-3-8171-1836-6

2.5.1.2 Definitionsbereich und einschränkende Bedingungen (Lösungen ab Seite 771)

2.125 Für welche x-Werte existieren die folgenden Wurzeln?

a) $\sqrt{x}$ b) $\sqrt{x^3}$ c) $\sqrt{x}^{\,3}$ d) $\sqrt[3]{x}$

e) $\sqrt[3]{x^2}$ f) $\sqrt[3]{x}^{\,2}$ g) $\sqrt{1-x}$ h) $\sqrt[3]{(x-y)^2}$

i) $\sqrt[3]{x-y}^{\,2}$ k) $\sqrt{a^2-x^2}$

2.126 Vereinfache die Wurzeln so weit wie möglich:

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[7]{-1}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{27^3}$ e) $\sqrt[6]{64}$

f) $\sqrt{(uv)^2}$ g) $\sqrt[4]{a+b}^{\,4}$ h) $\sqrt[3]{125x^6}$ i) $\sqrt{1-x^2}$ k) $\sqrt[3]{\left(8a^3b^6\right)^2}$

2.127 Desgleichen:

a) $\sqrt[4]{a^4}\,\sqrt[4]{b^{12}}\,\sqrt[4]{c^8}$ b) $\sqrt{(1-x)^2}$ c) $\sqrt[3]{(u-8)^3}$ d) $\sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{a^4}\,\sqrt[4]{b^8}\,\sqrt[4]{c^{20}}$

e) $\left(7\cdot\sqrt{a-b}\,\right)^2+\left(5\cdot\sqrt{b-c}\,\right)^2+\left(4\cdot\sqrt{c-a}\,\right)^2-\left(3\cdot\sqrt{b-c}\,\right)^2$

f) $5\cdot\sqrt{36}-8\cdot\sqrt[3]{64}+7\cdot\sqrt{121}-9\cdot\sqrt{64}$ g) $5\cdot\sqrt[4]{16}-10\cdot\sqrt[4]{81}-9\cdot\sqrt[3]{64}+8\cdot\sqrt[5]{243}$

h) $\left(2\cdot\sqrt{10}\right)^2-\left(10\cdot\sqrt{2}\right)^2+\left(4\cdot\sqrt{10}\right)^2$ i) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}+\sqrt{+\frac{1}{4}}-\sqrt[4]{\frac{1}{256}}+\sqrt[3]{\frac{1}{64}}+\sqrt[10]{+1}$

2.5.1.3 Die Berechnung von Wurzelwerten (Lösungen ab Seite 771)

2.128 Berechne durch Intervallschachtelung die Wurzelwerte und runde auf fünf Nachkommastellen:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{17}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt[3]{5{,}1}$

2.5.3 Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten (Lösungen ab Seite 771)

2.129 Schreibe die Potenzen als Wurzeln:

a) $4^{\frac{1}{3}}$ b) $x^{\frac{2}{5}}$ c) $a^{-\frac{1}{2}}$ d) $b\cdot c^{-\frac{2}{7}}$ e) $(b\,c)^{-\frac{2}{7}}$

f) $y^{-\frac{2}{3}}$ g) $z^{3\frac{1}{2}}$ h) $(m-n)^{-\frac{1}{x}}$ i) $a^{-0{,}5}$ k) $a\cdot b^{2{,}6}$

2.130 Desgleichen:

a) $a^{\frac{5}{6}}$ b) $b^{-\frac{4}{7}}$ c) $c^{\frac{11}{8}}$ d) $d^{-2\frac{2}{3}}$ e) $e^{0{,}64}$

f) $x^{2{,}5}$ g) $y^{-2{,}1}$ h) $z^{1{,}4}$ i) $u^{-0{,}75}$ k) $v^{-0{,}4n}$

2.131 Schreibe die Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten:

a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{7}$ d) $\sqrt[5]{a}$ e) $\sqrt[9]{x}$

f) $\sqrt[4]{b^3}$ g) $\sqrt[7]{x^4}$ h) $\sqrt[4]{x^7}$ i) $\sqrt{a+b}$ k) $\sqrt[3]{x^3-y^3}$

2.132 Desgleichen:

a) $\sqrt[3]{p^9}$ b) $\sqrt[15]{u^{20}}$ c) $\sqrt[4]{(x+y)^3}$ d) $m\cdot\sqrt[k]{p^2}$

e) $\sqrt[n-1]{x^{n+1}}$ f) $\sqrt[a-2]{(m-3n)^{3a-6}}$ g) $\sqrt[4]{m^2+n^2}$ h) $6\cdot\sqrt[3]{4a^2b^3c^4}$

i) $\sqrt[5]{p^2\,(q-r)^4}$ k) $\sqrt[6]{x^5y^6z^8u^{12}v^{14}w^{15}}$

2.133 Desgleichen:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

f) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ g) $\sqrt[5]{\dfrac{x^2}{y^3}}$ h) $\dfrac{a^m}{\sqrt[n]{b^x}}$ i) $\dfrac{\sqrt[4]{u^5}}{\sqrt[5]{v^4}}$ k) $\dfrac{3}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y^2}}$

2.134 Berechne die Zahlenwerte:

a) $2^{0,5}$ b) $16^{0,75}$ c) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-0,5}$ d) $0{,}343^{\frac{1}{3}}$ e) $256^{0,125}$

f) $1\,024^{-0,1}$ g) $1\,296^{-0,25}$ h) $274{,}625^{\frac{2}{3}}$ i) $7{,}84^{2,5}$ k) $0{,}561\,001^{1,5}$

2.5.4.1 Addition und Subtraktion von Wurzeln (Lösungen ab Seite 772)

2.135 Vereinfache ohne Benutzung der Wurzel-Tasten des Taschenrechners:

a) $7\cdot\sqrt{2}-13\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}+12\cdot\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{6}$

c) $\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt[4]{a}-\dfrac{5}{6}\cdot\sqrt[4]{a}+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{a}-\dfrac{7}{12}\sqrt[4]{a}$ d) $9\sqrt[3]{2}-3\sqrt[5]{2}+\sqrt[8]{2}$

e) $0{,}7\cdot\sqrt[5]{5b}+3{,}1\cdot\sqrt[5]{5b}-0{,}4\cdot\sqrt[5]{5b}+6{,}2\cdot\sqrt[5]{ab}-2{,}3\cdot\sqrt[5]{5b}$

f) $4\cdot\sqrt[3]{2}-5\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{8}+4\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{+8}$

g) $3\cdot\sqrt{5}+\sqrt{9}-2\cdot\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{5}-3-4\cdot\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{7}$

h) $\sqrt[3]{a}-\sqrt{a}$ i) $\sqrt[3]{a^3-b^3}$ k) $\sqrt{\dfrac{64}{225}+1}$

l) $\sqrt[3]{12^3-10^3-8^3}$ m) $\sqrt[7]{x^2}+2a\cdot\sqrt[7]{x^2}-4b\cdot\sqrt[7]{x^2}+c\cdot\sqrt[7]{x^2}$

2.5.4.2 Multiplikation und Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten (Lösungen ab Seite 772)

2.136 Berechne:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$ b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{12{,}5}$ c) $\sqrt{56}\cdot\sqrt{14}$ d) $\sqrt[3]{48}\cdot\sqrt[3]{36}$

e) $\sqrt{45}\cdot\sqrt{125}$ f) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}$ g) $\sqrt{140}\cdot\sqrt{35}$ h) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{4x}$

i) $\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{18a^2b^2}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{3a}$ k) $\sqrt{8yz}\cdot\sqrt{6xy}\cdot\sqrt{3xz}$

l) $\sqrt[4]{96uv^2w}\cdot\sqrt[4]{8v^3}\cdot\sqrt[4]{576u^3vw^2}\cdot\sqrt[4]{12v^2w}$ m) $\sqrt[7]{a^{n+2}}\cdot\sqrt[7]{a^{5n}}\cdot\sqrt[7]{a^{n+5}}$

2.5.4.3 Teilradizieren (Lösungen ab Seite 772)

2.137 Zerlege den Radikanden in Primfaktoren und ziehe die Wurzel teilweise:

a) $\sqrt{27}$ b) $\sqrt{75}$ c) $\sqrt{98}$ d) $\sqrt{320}$ e) $\sqrt{432}$

f) $\sqrt{72}$ g) $\sqrt{45}$ h) $\sqrt{360}$ i) $\sqrt{1\,176}$ k) $\sqrt[3]{448}$

l) $\sqrt[3]{160}$ m) $\sqrt[4]{405}$ n) $\sqrt{9\,375}$ o) $\sqrt{4\,536}$ p) $\sqrt{445\,500}$

q) $\sqrt[3]{12\,960}$ r) $\sqrt[3]{57\,408\,750}$ s) $\sqrt[5]{5\,686\,200\,000}$ t) $\sqrt[4]{45\,405\,868\,032}$

u) $\sqrt{11^2+2^2+5^2}$ v) $\sqrt{(-3)^2+9^2+1^2}$ w) $\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+5^2+0{,}2^2}$

2.138 Teilradiziere die Wurzeln aus Aufgabe 2.123.

Verlag Harri Deutsch – Kreul, Ziebarth: *Mathematik leicht gemacht* – ISBN: 978-3-8171-1836-6

2.139 Berechne ohne die Wurzel-Tasten des Taschenrechners:

a) $3 \cdot \sqrt{125} - 2 \cdot \sqrt{20} - 3 \cdot \sqrt{180} + 6 \cdot \sqrt{45}$

b) $\sqrt{720} - 2 \cdot \sqrt{242} + \sqrt{8} - 3 \cdot \sqrt{320} + 5 \cdot \sqrt{72} + 3 \cdot \sqrt{162} - 4 \cdot \sqrt{605}$

c) $\left(6 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{18} + 5 \cdot \sqrt{50} - 2 \cdot \sqrt{98}\right) \cdot 2 \cdot \sqrt{2}$

d) $\left(\sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{3}\right)$ e) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$

f) $\left(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{6}\right) \cdot 3\sqrt{6}$ g) $\left(3\sqrt{6} - 2\sqrt{5}\right)^2$

h) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ i) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{686}$

k) $15 \cdot \sqrt[3]{1\,029} - 8\sqrt{147} - 11 \cdot \sqrt[3]{648} + 5\sqrt{363} + 4 \cdot \sqrt[3]{192} - 2\sqrt{1\,875}$

2.140 Desgleichen:

a) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$ b) $\left(\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}\right)^2$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{23} + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{23} - \sqrt{7}} + \sqrt[6]{5\sqrt{2} + 7} \cdot \sqrt[6]{5\sqrt{2} - 7}$

d) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + 3\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{0{,}5}\right) \cdot \sqrt{2}$

e) $\sqrt{4a^2 - 4b^2} + \sqrt{(a+b)^2} - 5\sqrt{(a+b)(a-b)} + \sqrt{9\left(a^2 - b^2\right)} - \sqrt{(a-b)^2}$

f) $\sqrt[3]{9 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{17}}$ g) $\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$

h) $\left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)$ i) $\left(\sqrt[5]{16} - 2 \cdot \sqrt[5]{8}\right)\left(2 \cdot \sqrt[5]{2} - 3 \cdot \sqrt[5]{4}\right)$

k) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{11}+\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{11}-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}+\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}-\sqrt{7}\right)$

2.141 Bringe den vor der Wurzel stehenden Faktor mit unter die Wurzel
Bei m) sei der Faktor positiv.

a) $x \cdot \sqrt{y}$ b) $4 \cdot \sqrt{3}$ c) $3a \cdot \sqrt[3]{x}$ d) $xy \cdot \sqrt{z}$ e) $2m \cdot \sqrt[4]{m}$

f) $x \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}$ g) $\frac{2}{y} \cdot \sqrt[3]{5y}$ h) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ i) $b \cdot \sqrt[3]{a}$

k) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{11}\right) \cdot \sqrt{\sqrt{11} + 2 \cdot \sqrt{2}}$ l) $\frac{\sqrt{21ab^2}}{3a\sqrt{7b}}$ m) $\frac{u+v}{u} \cdot \sqrt[3]{\frac{u^4 - u^3v}{u^2 + 2uv + v^2}}$

2.5.4.4 Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten

(Lösungen ab Seite 773)

2.142 Berechne ohne die Wurzel-Tasten des Taschenrechners:

a) $\sqrt{147} : \sqrt{3}$ b) $\sqrt{272} : \sqrt{17}$ c) $\sqrt{90} : \sqrt{18}$ d) $\sqrt{120} : \sqrt{5}$

e) $\sqrt{\frac{5}{8}} : \sqrt{\frac{5}{32}}$ f) $\sqrt{17\frac{1}{3}} : \sqrt{4\frac{1}{3}}$ g) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}} : \sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$ h) $\sqrt[3]{x^8} : \sqrt[3]{x^5}$

i) $\sqrt[5]{a^{n+5}} : \sqrt[5]{a^{n-5}}$ k) $\sqrt{27\frac{5}{9}} : \sqrt{3\frac{4}{9}}$ l) $9\sqrt{\frac{1}{45}} : \frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$ m) $\sqrt[3]{102} : \sqrt[3]{4\frac{1}{4}}$

2.143 Desgleichen:

a) $\left(10\sqrt{48}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12}\right):\sqrt{3}$ b) $\left(15\sqrt{50}+5\sqrt{200}-3\sqrt{450}\right):\sqrt{10}$

c) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{4}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}\right):\frac{8}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}$ d) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right):2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

e) $\left(\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}\right):\sqrt{xy}$ f) $\left(\sqrt{ab}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\right):\sqrt{a}$

g) $\left(\frac{3x}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-0{,}4\sqrt{\frac{3}{xy}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{xy}{2}}\right):\frac{4}{15}\sqrt{\frac{3y}{2x}}$ h) $\left(\sqrt{a^5b^3}-\sqrt{a^3b^5}\right):\sqrt{a^2b^3}$

i) $\left(\frac{a}{2}\sqrt[3]{a^2b}+\frac{b}{3a^2}\sqrt[3]{\frac{15a}{b^2}}-\frac{4a}{5b}\sqrt[3]{\frac{b}{2a^2}}\right):\frac{2a^3}{15b^2}\sqrt[3]{\frac{5a^2}{2b}}$ k) $\left(xy^2-y\right):\sqrt{y}$

2.5.4.5 Rationalmachen des Nenners

(Lösungen ab Seite 773)

2.144 Mache den Nenner rational:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{210a^5b}\cdot\sqrt[3]{450a^2b^7}\cdot\sqrt[3]{24ab}}{\sqrt[3]{84a^2b^6}}$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{144u^2v}\cdot\sqrt[4]{8u}\cdot\sqrt[4]{450v^3}}{\sqrt[4]{18uv}\cdot\sqrt[4]{30u^3v}\cdot\sqrt[4]{60u^3v^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a^4-x^4}}\cdot\sqrt{a^2+x^2}$ d) $\dfrac{\sqrt[n]{a^{2n-3}}\cdot\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+7}}{\sqrt[n]{a^4}}$

e) $(m-n):\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)$ f) $(4-a):\left(2+\sqrt{a}\right)$

g) $\left(\sqrt[3]{36x^2}-\sqrt[3]{9y^2}\right):\left(\sqrt[3]{6x}-\sqrt[3]{3y}\right)$

h) $(a+b):\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$ i) $(4m-7n):\left(\sqrt[3]{4m}-\sqrt[3]{7n}\right)$

k) $\left(12x^2-9x\sqrt{xy}+20y\sqrt{xy}-8x\sqrt{y}+6y\sqrt{x}-15y^2\right):\left(4\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)$

2.145 Desgleichen:

a) $\frac{7}{3\sqrt{7}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{15}{\sqrt{15}}$

f) $\sqrt{\frac{1}{6}}$ g) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ h) $20\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$ i) $\frac{5}{6}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}$ k) $\frac{5}{\sqrt{12}}$

2.146 Desgleichen:

a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{5b}{3\sqrt{15a}}$ c) $\sqrt{\frac{5m}{4x}}$ d) $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}}$

e) $\frac{3x^2}{\sqrt[7]{x^2}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[n]{y^{n-4}}}$ g) $\frac{4m^3}{\sqrt[5]{m^2}}$ h) $\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

i) $\frac{8-12\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}$ k) $\frac{1-\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3}}$ l) $\frac{4a^2-25b^2}{\sqrt{2a+5b}}$ m) $\frac{7m-3n}{\sqrt{7m+3n}}$

2.147 Berechne:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ c) $\frac{9}{2\sqrt{3}-3}$ d) $\frac{12}{7-3\sqrt{5}}$

e) $\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}$ f) $\frac{14}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$ g) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ h) $\frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{15}}{7\sqrt{3}+3\sqrt{10}}$

Verlag Harri Deutsch – Kreul, Ziebarth: *Mathematik leicht gemacht* – ISBN: 978-3-8171-1836-6

i) $\dfrac{4\sqrt{14}-7\sqrt{3}}{4\sqrt{6}-3\sqrt{7}}$ k) $\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ l) $\dfrac{5}{\sqrt{5}+5}$ m) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

2.148 Berechne:

a) $\dfrac{\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{2}{5}\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{1\frac{1}{2}}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}-\sqrt{\frac{2}{3}}}$

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}$ d) $\dfrac{4+2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

e) $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{8}}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{12}}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}}$

i) $\dfrac{2k-6}{\sqrt{k^2-9}}$ k) $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

l) $\dfrac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$ m) $\dfrac{\left(\sqrt{0{,}5}\right)^{-2}\sqrt{2}}{\sqrt{2^3}\sqrt{0{,}5}\left(\sqrt{0{,}5}\right)^3}$

2.5.4.6 Radizieren von Potenzen und Wurzeln (Lösungen ab Seite 774)

2.149 Vereinfache:

a) $\left(\sqrt{5}\right)^2$ b) $\left(\sqrt[6]{a^2}\right)^3$ c) $\left(\sqrt[3]{b}\right)^2$ d) $\left(\sqrt[3]{y}\right)^6$ e) $\sqrt[4]{x^2y^3}^{\,3}$

f) $\sqrt[7]{m^2ny^3}^{\,-1}$ g) $\sqrt[6]{a^4b^3c^2}^{\,2}$ h) $\sqrt[4]{x}^{\,-4}$ i) $\sqrt[12]{r^4s^5t^8}^{\,3}$ k) $\sqrt{abc}^{\,-4}$

2.150 Verkleinere den Wurzelexponent so weit wie möglich:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[6]{16}$ c) $\sqrt[8]{16}$ d) $\sqrt[12]{81}$ e) $\sqrt[10]{64}$

f) $\sqrt[4]{25}$ g) $\sqrt[6]{729}$ h) $\sqrt[8]{1\,296}$ i) $\sqrt[16]{6\,561}$ k) $\sqrt[18]{15\,625}$

2.151 Desgleichen:

a) $\sqrt[8]{256^3}$ b) $\sqrt[6]{4\,096^5}$ c) $\sqrt[3]{216^2}$ d) $\sqrt{100^3}$ e) $\sqrt[6]{49^3}$

f) $\sqrt[6]{125^2}$ g) $\sqrt[8]{1{,}44^4}$ h) $\sqrt[4]{0{,}01^8}$ i) $\sqrt[14]{128^3}$ k) $\sqrt[20]{59\,049^7}$

2.152 Desgleichen:

a) $\sqrt[6]{a^4}$ b) $\sqrt[15]{x^{20}}$ c) $\sqrt[2n]{a^{3n}}$ d) $\sqrt[4]{25x^2y^6}$

e) $\sqrt[8]{16m^{12}n^4}$ f) $\sqrt[21]{p^{21k}q^{7n}}$ g) $\sqrt[3n]{v^n}$ h) $\sqrt[m+2]{u^{5m+10}}$

i) $\sqrt[p]{u^{kp-p}\,v^{kp+p}}$ k) $\sqrt[12]{64\,a^{24}\,b^{18}\,c^{15}\,d^{12}\,e^{10}\,x^9\,y^8\,z^6\,u^4\,v^3\,w^2}$

2.153 Bringe den Wurzelexponent auf die Zahl, die neben der Aufgabe in Klammern angegeben ist:

a) $\sqrt{u}$ (6) b) $\sqrt[3]{v^2}$ (12) c) $\sqrt[4]{x^3y}$ (8) d) $\sqrt[7]{a^5b^2c^6}$ (21)

e) $\sqrt[5]{a+b}$ (20) f) $\sqrt[3]{k^2}$ (4) g) $\sqrt[6]{a^2b^3-c}$ (18) h) $\sqrt[5]{ak^2r}$ (15)

i) $\sqrt{x-y}$ (4) k) $\sqrt[4]{mn^3}$ (13) l) $\sqrt[9]{a^2-b^2}$ (18) m) $\sqrt[6]{m^4(u-v)^2}$ (9)

2.154 Beseitige die Doppelwurzeln:

a) $\sqrt{\sqrt[5]{x^4}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}$ d) $\sqrt[x]{\sqrt[3]{a^x}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{u^3-3u^2v+3uv^2-v^3}}$ f) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{p^{10}q^5}}$ g) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{m^2n^6}}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6b^3c^9}}$ i) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$ k) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^5y^{10}z^{15}}}$

2.5.4.7 Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten (Lösungen ab Seite 775)

2.155 Berechne:

a) $\sqrt[16]{6\,561}$ b) $\sqrt[18]{262\,144}$ c) $\sqrt[4]{1\,296}$

d) $\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}$ e) $\sqrt{\dfrac{x}{y}\cdot\sqrt{\dfrac{x}{y}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{y^3}{x}}}}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{u}{v}\cdot\sqrt{\dfrac{v^2}{u}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{u^2}}}}$

g) $\sqrt[3]{m^2\sqrt{m\sqrt[5]{m^8\sqrt[4]{m^3}}}}$ h) $\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}} : \sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}$

i) $\sqrt[3]{\sqrt[6]{u}}\cdot\sqrt[9]{\sqrt{u^4}}\cdot\sqrt[18]{u^7}\cdot\sqrt[9]{u^3}$ k) $\dfrac{\sqrt[6]{x^5\cdot\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt[6]{x^4}}} : \dfrac{\sqrt{x^3\cdot\sqrt[9]{x^7}}}{\sqrt[9]{x^7\cdot\sqrt{x}}}$

2.156 Berechne:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}$ b) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{4}{5}}\cdot\sqrt[6]{5}$ f) $\sqrt[5]{16}:\sqrt{2}$ g) $\sqrt{3}:\sqrt[3]{2}$ h) $\sqrt[6]{32}:\sqrt[3]{2}$

i) $\sqrt[5]{6}:\sqrt[6]{5}$ k) $\sqrt[7]{\dfrac{64}{15}}:\sqrt[4]{\dfrac{8}{5}}$ l) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{8}$ m) $\sqrt[4]{\dfrac{28}{3}}:\sqrt[5]{\dfrac{4}{9}}$

2.157 Berechne:

a) $\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[5]{x}$ b) $\sqrt[5]{u^2v}\cdot\sqrt[3]{uv^4}\cdot\sqrt[10]{uv^2}$

c) $\sqrt[3]{m^2}\cdot\sqrt{m^2n^3}\cdot\sqrt[4]{n^9}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}}$

e) $\left(3\sqrt{10}-2\cdot\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{25}\right)\cdot\sqrt[4]{2}$ f) $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}\right)$

g) $\left(4\sqrt{8}+6\cdot\sqrt[3]{2}\right):\sqrt{2}$ h) $\left(2\sqrt{12}+4\cdot\sqrt[3]{4}-6\cdot\sqrt[4]{32}\right):\left(2\cdot\sqrt[4]{2}\right)$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[4]{8}}{\sqrt[12]{2}}$ k) $\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$

l) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ m) $\dfrac{100}{10-\sqrt{99}}$

n) $\left(0{,}5x^{0{,}5}-0{,}5x^{-0{,}5}\right)^2$ o) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}-\sqrt{3}$

p) $\sqrt[4]{3c\sqrt[5]{4r^2}}$

Verlag Harri Deutsch – Kreul, Ziebarth: *Mathematik leicht gemacht* – ISBN: 978-3-8171-1836-6

2.158 Setze in den Term $\dfrac{z}{\sqrt{\left(1+a^2\right)^3}}$ für a und z die jeweiligen Ausdrücke ein und vereinfache dann den Term.

	a)	b)	c)	d)	e)
a	$\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$	$-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$
z	$\dfrac{3}{4\sqrt{x}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{4(x-2)\cdot\sqrt{x-2}}$	$-\dfrac{r^2}{\sqrt{\left(r^2-x^2\right)^3}}$ $r>0$

2.6 Logarithmenrechnung

Durch Verkürzung der Arbeit verdoppelten die Logarithmen die Leben der Astronomen.

Pierre Simon Laplace, 1749–1827

2.6.1 Logarithmieren als zweite Umkehrung des Potenzierens

2.6.1.1 Der Logarithmusbegriff

Wenn aus der Potenzgleichung

$$a^c = b$$

bei bekannter Basis a und bekanntem Potenzwert b der Exponent c bestimmt werden soll, dann ist diese Aufgabe weder mit der Potenzrechnung noch mit der Wurzelrechnung lösbar. Der Grund ist, dass bei der Berechnung von a^c die Basis a und der Exponent c *nicht miteinander vertauscht werden dürfen.*

Zur Lösung dieser Aufgabe ist eine neue Rechenart, die **Logarithmenrechnung**[1] erforderlich.

Die Auflösung der obigen Potenzgleichung nach dem Exponenten schreibt man in der Form

$$\boxed{c = \log_a(b)} \tag{2.66}$$

und liest[2] es als „c ist der Logarithmus von b zur Basis a“.

■ **Der Logarithmus entspricht in der Potenzschreibweise dem Exponenten**.

[1] logos (griech) Vernunft, richtige Beziehung; arithmos (griech) Zahl. Der Logarithmus ist demnach die Zahl, die zwischen Basis und Potenzwert die richtige Beziehung herstellt.
Singular: der Logarithmus; Plural: die Logarithmen.

[2] Die Formulierung, „den Logarithmus aus einer Zahl ziehen“ ist falsch. Wurzeln werden gezogen, Logarithmen dagegen berechnet.

Verlag Harri Deutsch – Kreul, Ziebarth: *Mathematik leicht gemacht* – ISBN: 978-3-8171-1836-6