

Hans Kreul
Harald Ziebarth

Mathematik leicht gemacht

7., erweiterte Auflage

Verlag
Harri
Deutsch 

Autoren:

Prof. Dr.-Ing. Hans Kreul lehrte an der Fachhochschule Zittau.

Er ist Mitbegründer von *Mathematik leicht gemacht* und Autor zahlreicher weiterer mathematischer Lehrbücher.

Harald Ziebarth ist Privatlehrer für Mathematik, Biologie und Chemie. Er ist Mitautor zahlreicher Mathematikbücher für die Oberstufe.

Sein Spezialgebiet ist die Aufarbeitung mathematischer Grundlagen zur Vorbereitung der gymnasialen Oberstufe und des Grundstudiums. Als Angestellter des *Studienkreises* hat er zu diesem Zweck spezielle Unterrichts- und Kursmaterialien entwickelt.

Er betreut fachlich die Niederlassungen in Bonn und ist als leitender Tutor und Supervisor in einem der größten deutschsprachigen Internet-Foren zur Schulmathematik tätig.

Webseite zum Buch:

<http://www.harri-deutsch.de/1836.html>

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1836-6

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus – sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Text berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetze als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

7., erweiterte Auflage 2009

© Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2009

Satz: Satzherstellung Dr. Naake <www.naake-satz.de>

Druck: fgb · freiburger graphische betriebe <www.fgb.de>

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zur Benutzung des Buches	1
1 Zur Technik des Zahlenrechnens	11
1.1 Der Zahlbegriff	11
1.1.1 Die natürlichen Zahlen	11
1.1.2 Das dekadische Positionssystem	13
1.1.3 Das duale Positionssystem	15
1.1.4 Das römische Zahlensystem	20
1.1.5 Konstante und Variable	22
1.2 Das Rechnen mit Zahlen	25
1.2.1 Bezeichnungen	25
1.2.2 Die Teilbarkeit von Zahlen	26
1.2.2.1 Teiler einer Zahl	26
1.2.2.2 Teilbarkeitsregeln	27
1.2.2.3 Primzahlen	30
1.2.2.4 Der größte gemeinsame Teiler	32
1.2.2.5 Das kleinste gemeinsame Vielfache	35
1.2.3 Gewöhnliche Brüche	36
1.2.3.1 Begriffserklärungen	36
1.2.3.2 Erweitern und Kürzen von Brüchen	38
1.2.3.3 Addition und Subtraktion gewöhnlicher Brüche	39
1.2.3.4 Multiplikation von Brüchen	41
1.2.3.5 Der Kehrwert eines Bruches	42
1.2.3.6 Division von Brüchen	44
1.2.3.7 Doppelbrüche	44
1.2.3.8 Zusammenfassung Bruchrechnung	46
1.2.4 Dezimalbrüche	47
1.2.4.1 Begriffserklärungen	47
1.2.4.2 Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen	49
1.2.4.3 Multiplikation von Dezimalbrüchen	49
1.2.4.4 Division von Dezimalbrüchen	50
1.2.4.5 Umwandlung von Brüchen	52
1.2.4.6 Das Runden von Dezimalbrüchen	56
1.2.4.7 Bruch oder Dezimalzahl?	58
1.2.4.8 Größenvergleich von Brüchen	59
1.3 Rechenhilfsmittel	72
1.3.1 Taschenrechner	72
1.3.1.1 Grundrechenarten	73
1.3.1.2 Eingeben, Editieren, Löschen	75
1.3.1.3 Werte abspeichern	77
1.3.1.4 Terme berechnen	79
1.3.1.5 Funktionentasten	83
1.3.1.6 Verschiedene Arbeitsmodi	86
1.3.1.7 Kaufkriterien für einen Taschenrechner	87

1.3.2	Tabellenkalkulation	87
1.3.2.1	Kurze Einführung in Excel	88
1.3.2.2	Mathematik mit Excel	89
1.3.3	Computeralgebrasystem	90
1.3.3.1	Anwendungen für Derive	90
1.3.4	Funktionenplotter	91
2	Arithmetik	95
2.1	Die Rolle der Sprache in der Mathematik	95
2.1.1	Allgemeine Bemerkungen	95
2.1.2	Aussagen und Aussageformen	95
2.1.3	Verknüpfung von Aussagen	97
2.1.3.1	Einführendes Beispiel	97
2.1.3.2	Die Konjunktion	98
2.1.3.3	Die Disjunktion	99
2.1.3.4	Die Implikation	101
2.1.3.5	Die Äquivalenz	103
2.2	Grundbegriffe der Mengenlehre	106
2.2.1	Der Begriff der Menge	106
2.2.2	Zahlenmengen	108
2.2.3	Die Beschreibung von Mengen	109
2.2.3.1	Mengenschreibweise	110
2.2.3.2	Intervallschreibweise	113
2.2.4	Mengenrelationen	114
2.2.4.1	Teilmengen	114
2.2.4.2	Gleichheit zweier Mengen	115
2.2.5	Mengenoperationen	116
2.2.5.1	Vereinigung von Mengen	116
2.2.5.2	Durchschnitt von Mengen	118
2.2.5.3	Differenz zweier Mengen	121
2.3	Das Rechnen mit Variablen	125
2.3.1	Die vier Grundrechenoperationen	125
2.3.1.1	Einfache Rechenoperationen mit Variablen	125
2.3.1.2	Die negativen Zahlen	129
2.3.1.3	Addition und Subtraktion	132
2.3.1.4	Multiplikation	136
2.3.1.5	Division	139
2.3.2	Das Rechnen mit algebraischen Summen	141
2.3.2.1	Über die Bedeutung der Klammern	141
2.3.2.2	Setzen und Auflösen additiver und subtraktiver Klammern	141
2.3.2.3	Multiplikation von Klammerausdrücken	144
2.3.2.4	Ausklammern gemeinsamer Faktoren	147
2.3.2.5	Binomische Formeln	150
2.3.2.6	Die Quadratische Ergänzung	153
2.3.3	Bruchrechnung	155
2.3.3.1	Erweitern und Kürzen von Brüchen	156
2.3.3.2	Addition und Subtraktion von Brüchen	157
2.3.3.3	Multiplikation und Division von Brüchen	159
2.3.3.4	Doppelbrüche	161

2.4	Potenzrechnung	179
2.4.1	Begriffserklärungen	179
2.4.2	Potenzgesetze	183
2.4.2.1	Addition und Subtraktion von Potenzen	183
2.4.2.2	Multiplikation von Potenzen	183
2.4.2.3	Division von Potenzen	184
2.4.2.4	Potenzieren einer Potenz	186
2.4.2.5	Klammergesetze	187
2.4.3	Erste Erweiterung des Potenzbegriffs	189
2.4.4	Potenzen von Binomen	193
2.4.5	Polynomdivision	196
2.4.6	Ausklammern für Fortgeschrittene	201
2.4.7	Anwendungen der Potenzen	203
2.4.7.1	Schreibweise rationaler Zahlen mithilfe von Zehnerpotenzen	203
2.4.7.2	Schreibweise von Maßeinheiten	204
2.4.8	Übersicht der Potenzgesetze	206
2.5	Wurzelrechnung	215
2.5.1	Radizieren als erste Umkehrung des Potenzierens	215
2.5.1.1	Der Wurzelbegriff	215
2.5.1.2	Definitionsbereich und einschränkende Bedingungen	219
2.5.1.3	Die Berechnung von Wurzelwerten	221
2.5.2	Die reellen Zahlen	222
2.5.3	Zweite Erweiterung des Potenzbegriffs	225
2.5.4	Wurzelgesetze	227
2.5.4.1	Addition und Subtraktion von Wurzeln	227
2.5.4.2	Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten	228
2.5.4.3	Teilradizieren	229
2.5.4.4	Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten	231
2.5.4.5	Rationalmachen des Nenners	232
2.5.4.6	Radizieren von Potenzen und Wurzeln	235
2.5.4.7	Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten	236
2.5.4.8	Rückblick auf die Potenz- und die Wurzelgesetze	237
2.6	Logarithmenrechnung	245
2.6.1	Logarithmieren als zweite Umkehrung des Potenzierens	245
2.6.1.1	Der Logarithmusbegriff	245
2.6.1.2	Logarithmengesetze	248
2.6.2	Spezielle Logarithmensysteme	251
2.6.2.1	Die dekadischen Logarithmen	251
2.6.2.2	Die natürlichen Logarithmen	253
2.6.2.3	Die dualen Logarithmen	254
2.6.2.4	Weitere Logarithmensysteme	254
2.6.3	Zusammenfassung	256
3	Algebra	263
3.1	Lineare Gleichungen und Ungleichungen	263
3.1.1	Vorbemerkungen und Begriffserklärungen	263
3.1.1.1	Definitionsbereich	263
3.1.1.2	Gleichungen	266
3.1.1.3	Ungleichungen	269

3.1.2	Umformung von Gleichungen	270
3.1.2.1	Äquivalente Umformung von Gleichungen	270
3.1.2.2	Nichtäquivalente Umformung von Gleichungen	272
3.1.2.3	Elektronische Hilfsmittel beim Lösen von Gleichungen	275
3.1.3	Lösung linearer Gleichungen mit einer Variablen	277
3.1.3.1	Begriffserklärungen	277
3.1.3.2	Einfache lineare Gleichungen	278
3.1.3.3	Nichtlineare Gleichungen auf lineare Gleichungen zurückführen	280
3.1.3.4	Gleichungen mit Parametern	281
3.1.3.5	Gleichungen mit Klammerausdrücken	283
3.1.3.6	Bruchgleichungen	285
3.1.3.7	Wurzelgleichungen	288
3.1.3.8	Gleichungen mit eingeschränktem Definitionsbereich	291
3.1.3.9	Das Umstellen von Formeln	291
3.1.3.10	Anwendungen	293
3.1.3.11	Schlussbemerkungen	299
3.1.4	Das Rechnen mit Ungleichungen	300
3.1.5	Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen	305
3.2	Proportionen	314
3.2.1	Begriffserklärungen	314
3.2.2	Rechengesetze für Proportionen	316
3.2.3	Fortlaufende Proportionen	318
3.2.4	Direkte Proportionalität	319
3.2.5	Indirekte Proportionalität	320
3.2.6	Proportionen als Gleichungen	321
3.3	Prozentrechnung	325
3.3.1	Grundbegriffe	325
3.3.2	Berechnung des Prozentsatzes	326
3.3.3	Berechnung des Prozentwertes	327
3.3.4	Berechnung des Grundwertes	328
3.3.5	Verminderter oder vermehrter Grundwert	328
3.3.6	Promillerechnung	333
3.3.7	Zinsrechnung	334
3.3.8	Zinseszinsrechnung	336
3.4	Lineare Gleichungssysteme	342
3.4.1	Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	342
3.4.2	Lösungsverfahren für LGS mit zwei Variablen	344
3.4.2.1	Das Einsetzungsverfahren	344
3.4.2.2	Das Gleichsetzungsverfahren	345
3.4.2.3	Das Additionsverfahren	346
3.4.2.4	Bemerkungen zu den drei Lösungsverfahren	346
3.4.2.5	Die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen	347
3.4.2.6	Schwierigere Gleichungssysteme	350
3.4.3	LGS mit drei und mehr Variablen	354
3.4.3.1	Begriffserklärungen	354
3.4.3.2	Lösungsverfahren für LGS mit drei und mehr Variablen	355
3.4.4	LGS mit elektronischen Hilfsmitteln lösen	363
3.4.4.1	Taschenrechner	363
3.4.4.2	CAS	363

3.5	Quadratische Gleichungen	371
3.5.1	Begriffserklärungen	371
3.5.2	Spezielle Formen der quadratischen Gleichung	374
3.5.2.1	Die reinquadratische Gleichung	374
3.5.2.2	Die gemischtquadratische Gleichung ohne Absolutglied	377
3.5.3	Die Normalform der quadratischen Gleichung	378
3.5.3.1	Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen	378
3.5.3.2	Die Lösung der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung	383
3.5.4	Beziehungen zwischen den Koeffizienten und den Lösungen einer quadratischen Gleichung	386
3.5.4.1	Die Diskriminante	386
3.5.4.2	Der Wurzelsatz von VIETA	387
3.5.4.3	Die Produktform quadratischer Terme – Faktorisieren für Profis	388
3.5.5	Quadratische oder höhere Ungleichungen	390
3.5.6	Wurzelgleichungen, Teil 2	393
3.5.7	Quadratische Gleichungssysteme	394
3.5.8	Biquadratische Gleichungen	395
3.6	Polynomgleichungen	407
3.6.1	Gleichungen ohne Absolutglied	410
3.6.2	Kubische Gleichungen	411
3.6.2.1	Kubische Gleichungen mit Absolutglied	411
3.6.2.2	Methode des gezielten Ratens	413
3.6.2.3	Der Einfluss des Leitkoeffizienten	416
3.6.3	Höhere Polynomgleichungen	418
3.6.4	Übersicht	420
4	Funktionen	423
4.1	Begriffsbestimmungen	423
4.1.1	Der Begriff der Abbildung	423
4.1.2	Der Begriff der Funktion	425
4.2	Arten der Darstellung von Funktionen	428
4.2.1	Darstellung einer Funktion durch die Angabe der geordneten Paare	428
4.2.2	Darstellung einer Funktion durch eine Wertetabelle	429
4.2.3	Darstellung einer Funktion durch Zuordnungsgraphen	429
4.2.4	Darstellung einer Funktion durch wörtliche Formulierung der Zuordnungsvorschrift	430
4.2.5	Darstellung einer Funktion durch mathematische Relationen	431
4.2.6	Darstellung einer Funktion durch eine Kurve	432
4.2.6.1	Das rechtwinklige Koordinatensystem	432
4.2.6.2	Darstellung von Funktionen in Form von Graphen	435
4.2.6.3	Grafische Darstellung von Funktionen, die nicht von vornherein als Kurven gegeben sind	437
4.2.6.4	Zusammenhänge zwischen der Gleichung einer Funktion und der zugehörigen Kurve	441
4.2.6.5	Schnittpunkt zweier Kurven	443
4.3	Wichtige Eigenschaften von Funktionen	446
4.3.1	Monotonie	446
4.3.2	Stetigkeit	447
4.3.3	Gerade Funktionen	449

4.3.4	Ungerade Funktionen	450
4.3.5	Schnittpunkte mit den Achsen	451
4.4	Lineare Funktionen	453
4.4.1	Vorbemerkungen	453
4.4.2	Begriffserklärungen	453
4.4.3	Die Funktion $y = mx$	455
4.4.4	Die Funktion $y = mx + b$	457
4.4.5	Grafische Darstellung der linearen Funktion	460
4.4.6	Grafische Lösung linearer Gleichungen und linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen	461
4.5	Quadratische Funktionen	466
4.5.1	Begriffserklärungen	466
4.5.2	Die quadratische Funktion $y = x^2$	466
4.5.3	Die quadratische Funktion $y = x^2 + q$	468
4.5.4	Die quadratische Funktion $y = x^2 + px + q$	468
4.5.5	Die allgemeine quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$	472
4.5.6	Modellieren quadratischer Funktionen	475
4.5.7	Parabel und Gerade	477
4.5.8	Grafische Lösung quadratischer Gleichungen	479
4.6	Potenzfunktionen	484
4.6.1	$y = x^n$ mit ganzzahligem positivem Exponenten	484
4.6.2	Die Potenzfunktion $y = x^0$	486
4.6.3	$y = x^{-n}$ mit ganzzahligem negativem Exponenten	487
4.6.4	$y = x^a$ mit gebrochenem Wert des Exponenten a	489
4.7	Wichtige transzendente Funktionen	490
4.7.1	Die Exponentialfunktionen	490
4.7.2	Die logarithmischen Funktionen	492
5	Planimetrie	495
5.1	Grundbegriffe der Geometrie	495
5.2	Lagebeziehungen zwischen Geraden und Winkeln	498
5.2.1	Parallele Geraden	498
5.2.2	Schnitt zweier Geraden	498
5.2.3	Winkel an Parallelen	499
5.3	Symmetrie	500
5.3.1	Axiale Symmetrie	500
5.3.2	Zentrale Symmetrie	501
5.3.3	Geometrische Grundkonstruktionen	502
5.3.4	Punktmengen	504
5.4	Das Dreieck	506
5.4.1	Allgemeines Dreieck	506
5.4.2	Spezielle Dreiecke	508
5.4.3	Dreieckstransversalen und deren Schnittpunkte	509
5.5	Das Viereck	512
5.5.1	Allgemeines Viereck	512
5.5.2	Spezielle Vierecke	513
5.6	Das Vieleck	516
5.6.1	Unregelmäßiges Vieleck	516
5.6.2	Regelmäßige Vielecke	517

5.7	Kongruenz	517
5.7.1	Was ist Kongruenz?	517
5.7.2	Kongruenz von Dreiecken	518
5.8	Ähnlichkeit	521
5.8.1	Ähnlichkeit im Allgemeinen	521
5.8.2	Ähnlichkeit von Dreiecken	521
5.8.3	Strahlensätze	523
5.9	Das rechtwinklige Dreieck	529
5.10	Strecken und Winkel am Kreis	538
5.10.1	Kreis und Gerade	538
5.10.2	Winkel am Kreis	541
5.10.3	Ähnlichkeit am Kreis	543
5.10.4	Der Goldene Schnitt	545
5.11	Berechnung von Flächen und Umfängen	549
5.11.1	Vierecke	549
5.11.2	Dreiecke	551
5.11.3	Unregelmäßige Vielecke	552
5.11.4	Regelmäßige Vielecke	552
5.11.5	Kreis und Kreisteile	554
5.11.6	Umfang und Flächeninhalt ähnlicher Flächen	560
6	Goniometrie	579
6.1	Das Bogenmaß	579
6.2	Winkelfunktionen	581
6.2.1	Definition der Winkelfunktionen	581
6.2.2	Kurvenbilder der Winkelfunktionen	584
6.2.3	Die Zahlenwerte der Winkelfunktionen	588
6.2.4	Die Umkehrung der Winkelfunktionen	591
6.2.5	Elementare Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen	595
6.3	Trigonometrie	598
6.3.1	Die Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck	599
6.3.2	Sätze über beliebige Dreiecke	605
6.3.2.1	Der Sinussatz	605
6.3.2.2	Die Flächenformel für Dreiecke	607
6.3.2.3	Der Kosinussatz	607
6.3.3	Die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke	608
6.4	Additionstheoreme	616
6.5	Goniometrische Gleichungen	621
7	Stereometrie	627
7.1	Einteilung der Körper	627
7.1.1	Ebenflächner	627
7.1.2	Krummflächner	630
7.2	Darstellung von Körpern	634
7.2.1	Mehrtafelprojektion	634
7.2.2	Axonometrische Projektion	635
7.2.2.1	Isometrische Projektion	635
7.2.2.2	Dimetrische Projektion	637

7.3	Körperberechnung	638
7.3.1	Berechnungsgrundlagen	638
7.3.2	Ebenflächner	638
7.3.2.1	Quader und Würfel	638
7.3.2.2	Gerades Prisma	643
7.3.2.3	Satz des CAVALIERI	647
7.3.2.4	Pyramide	649
7.3.2.5	Pyramidenstumpf	653
7.3.3	Krummflächner	657
7.3.3.1	Kreiszyylinder	657
7.3.3.2	Kegel	666
7.3.3.3	Kegelstumpf	670
7.3.3.4	Kugel und Kugelteile	676
7.3.4	Die GULDIN'schen Regeln	694
Anhang – Mathematische Zeichen		703
Anhang – Mathematische Begriffe		709
Lösungen		741
Sachwortverzeichnis		837